Grundlagen der Elektrotechnik
Probeklausur (Tutorium) 2016
Duale Hochschule Karlsruhe
Dozent: Gerald Oberschmidt

Hilfsmittel:

- 2 Blatt DIN A4
- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- Stift, (leeres) Papier, Geodreieck/ Lineal

1 Temperaturabhängige Widerstände (11 Punkte)

Eine Freileitung aus Kupfer wird im Sommer und im Winter benutzt. Die Materialparameter sind $\kappa = 57 \times 10^6 \, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ für die Leitfähigkeit von Kupfer bei 20°C; der Temperaturkoeffizient des Widerstandes beträgt $\alpha_{CU20} = 0,004 \, \frac{1}{°\mathrm{C}}$ bei eben der Temperatur. Die Leitung hat eine einfache Länge von 10 km und einen kreisförmigen Querschnitt mit dem Durchmesser 10 mm. Im Winter sei es -20°C kalt und im Sommer 40°C heiß.

(a) Berechnen Sie die Gesamtwiderstände für Hin- und Rückleitung im Winter, im Sommer und bei der Bezugstemperatur 20°C!
Lösung: Für den Widerstand in Abhängigkeit von der Temperatur gilt

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\kappa}\frac{l}{A}\,(1 + \alpha \cdot \Delta T) \\ &= 4,467\,\Omega \left(1 + 0,004\frac{1}{°\mathrm{C}} \cdot \Delta T\right) \end{aligned}$$

Bewertung: (1) Punkt für die richtige Formel, auch ohne Zahlen werte

Wobei die Fläche $A = 78,54 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$ beträgt. Wir haben daher folgende Ergebnisse

Winter	-20°C	$R = 3,752\,\Omega$
Normal	+20°C	$R = 4,467\,\Omega$
Sommer	+40°C	$R = 4,825\,\Omega$

Bewertung: (1) Punkt für jeden richtigen Wert, also (3) insgesamt

(b) Wie groß ist der gesamte Spannungsabfall bei einem Strom von $I = 40\,\mathrm{A}$ in allen drei Fällen?
Lösung: Die Spannungsabfälle nach $\Delta U = R \times I$ bei $I = 40\,\mathrm{A}$ sind dann

Winter	-20°C	$\Delta U = 150\,\mathrm{V}$
Normal	+20°C	$\Delta U = 179\,\mathrm{V}$
Sommer	+40°C	$\Delta U = 193\,\mathrm{V}$

Bewertung: (1) Punkt für jeden richtigen Wert, also (3) insgesamt

(c) Welche Verlustleistungen ergeben sich daher in allen drei Fällen?
Lösung: Die Verlustleistungen ergeben sich nach $P = \Delta U \times I$ zu

Winter	-20°C	$P_V = 6,00\,\mathrm{kW}$
Normal	+20°C	$P_V = 7,15\,\mathrm{kW}$
Sommer	+40°C	$P_V = 7,72\,\mathrm{kW}$

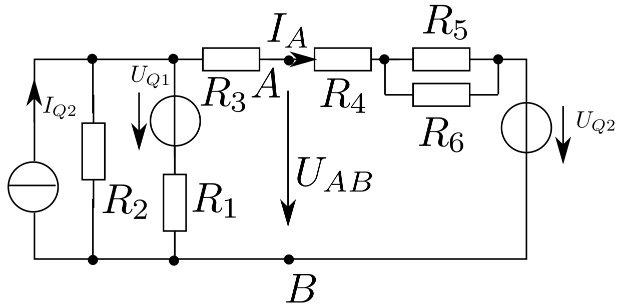
Bewertung: (1) Punkt für jeden richtigen Wert, also (3) insgesamt

(d) Wie viel Energie geht an einem kompletten 24-Stunden-Tag im Sommer mehr verloren als im Winter? Die Temperatur sei tagsüber wie nachts konstant.
Lösung: Im Sommer gehen 1,72 kW mehr in der Leitung verloren. Über einen gesamten Tag sind das dann

$$W = 1,72\,\mathrm{kW} \times 24\,\mathrm{h} = 41,3\,\mathrm{kWh} = 149\,\mathrm{MJ}.$$

Bewertung: (1) Punkt für den richtigen Wert

2 Ersatzspannungsquelle (20 Punkte)



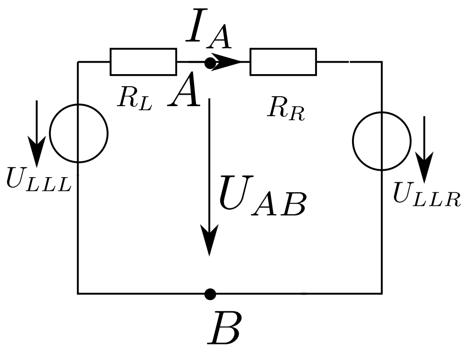
Für die gezeigte Schaltung sind der Strom durch den Knoten A sowie die Spannung zwischen A und B U_{AB} zu bestimmen.

(a) Bestimmen Sie die äquivalente Ersatzspannungsquelle links von A-B und die Rechts von A-B. Geben Sie jeweils auch die Kurzschlussströme an!
Lösung: Im Ergebnis ergibt sich folgendes:

	Links	Rechts
Leerlaufspannung	$U_{LLL} = \frac{U_{Q1}R_2+I_{Q2}R_1R_2}{R_1+R_2}$	$U_{LLR} = U_{Q2}$
Innenwiderstand	$R_L = \frac{R_3(R_1+R_2)+R_1R_2}{R_1+R_2}$	$R_R = \frac{R_4(R_5+R_6)+R_5R_6}{R_5+R_6}$
Kurzschlussstrom	$I_{KSL} = \frac{U_{Q1}R_2+I_{Q2}R_1R_2}{R_3(R_1+R_2)+R_1R_2}$	$I_{KSR} = U_{Q2}\frac{R_5+R_6}{R_4(R_5+R_6)+R_5R_6}$

Bewertung: (1) Punkt für jeden richtigen Zusammenhang, zusammen also (6) Punkte

(b) Bestimmen Sie die Spannung U_{AB} sowie den Strom I_A der Gesamtschaltung! Schalten Sie also beide Schaltungsteile zusammen. Sie können das Ergebnis als Funktion der Zwischenergebnisse von (a) angeben.
Lösung: In der gezeigten Zusammenschaltung kann ein Spannungsumlauf gemacht werden, um den Strom I_A zu bestimmen.



$$
\begin{aligned}
I_A R_L + I_A R_R + U_{LLR} - U_{LLL} &= 0 \\
\Leftrightarrow I_A &= \frac{U_{LLL} - U_{LLR}}{R_L + R_R}
\end{aligned}
$$

Bewertung: (2) Punkte für Gleichung und richtiges Ergebnis, Teilpunkte werden gegeben

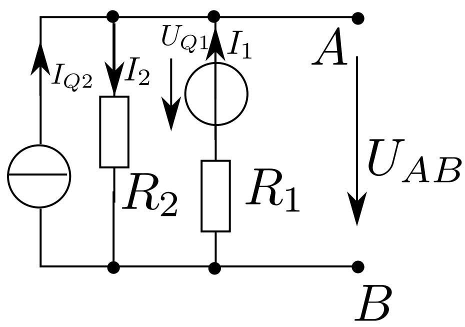
Und damit ist dann auch

$$U_{AB} = U_{LLL} - R_L I_A = U_{LLL} - R_L \frac{U_{LLL} - U_{LLR}}{R_L + R_R}$$

Bewertung: (2) Punkte für Gleichung und richtiges Ergebnis, Teilpunkte werden gegeben

(c) Stellen Sie U_{Q2} so ein, dass in dem Widerstand R_3 keine Leistung verbraucht wird. Wie groß muss U_{Q2} dann sein, und in welchen Widerständen wird zusätzlich keine Leistung mehr umgesetzt?
Lösung: Damit kein Strom mehr durch R_3 fließt, bzw. dort keine Leistung mehr umgesetzt wird, müssen Verhältnisse wie im Leerlauf vorliegen. Es muss also $U_{Q2} = U_{LLL} = \frac{U_{Q1}R_2 + I_{Q2}R_1R_2}{R_1 + R_2}$ gelten. In dem Fall sind die Widerstände 3,4,5 und 6 stromlos.
Bewertung: (1) Punkt für die Spannung, (1) Punkt für die Widerstände (R_3 muss nicht nochmal erwähnt werden

(d) Zeichnen Sie ein Ersatzschaltbild der obigen Schaltung für den Fall, dass Bedingung (c) erfüllt ist. Lassen Sie alle unnötigen Schaltungsteile, durch die kein Strom fließt also weg.
Lösung: Da Leerlaufverhältnisse vorliegen, kann die Schaltung wie gezeigt vereinfacht werden:



Bewertung: (1) Für den Wegfall der richtigen Widerstände (ggf. Folgefehler zu oben), (1) für Erkenntnis des Leerlaufs, (1) für die verbleibenden Schaltungsteil

(e) Geben Sie unter dieser Bedingung den Leistungsumsatz in R_1 und R_2 an! Verwenden Sie dabei das Überlagerungsprinzip!
Lösung: Es sind also nur noch die Leistungsumsätze in Widerständen 1 und 2 zu berechnen. Die Wirkungen der einzelnen Quellen auf die Widerstände werden untersucht. Selbstverständlich können nach dem Überlagerungsprinzip nur Ströme und Spannungen berechnet werden, die Leistungen können nur hinterher eben daraus bestimmt werden. Es gilt also für die Ströme

$$\begin{aligned}
I_{21} = I_{11} &= \frac{U_{Q1}}{R_1 + R_2} \\
I_{12} &= -I_{Q2}\frac{R_2}{R_1 + R_2} \\
I_{22} &= I_{Q2}\frac{R_1}{R_1 + R_2} \\
I_1 = I_{11} + I_{12} &= \frac{U_{Q1} - I_{Q2}R_2}{R_1 + R_2} \\
I_2 = I_{21} + I_{22} &= \frac{U_{Q1} + I_{Q2}R_1}{R_1 + R_2}
\end{aligned}$$

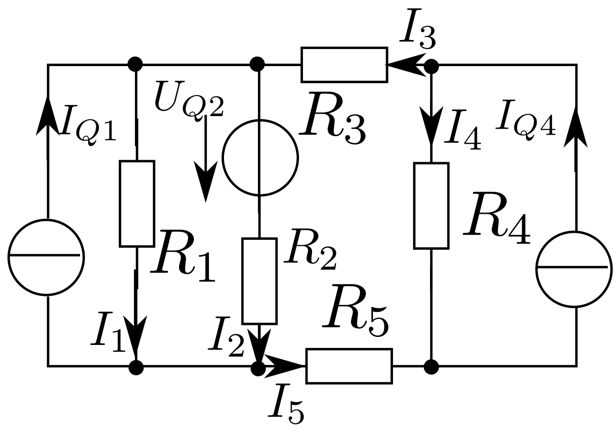
Bewertung: (1) für I_1 und (1) für I_2

Und die Leistungen sind damit dann

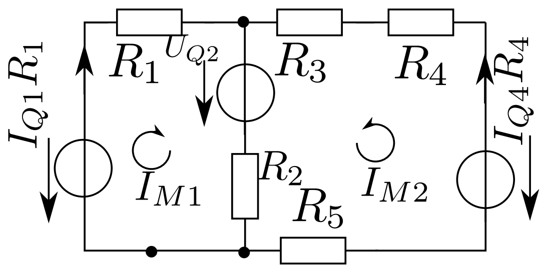
$$\begin{aligned}
P_{R1} &= R_1 I_1^2 = \left(\frac{U_{Q1} - I_{Q2}R_2}{R_1 + R_2}\right)^2 R_1 \\
P_{R2} &= R_2 I_2^2 = \left(\frac{U_{Q1} + I_{Q2}R_1}{R_1 + R_2}\right)^2 R_2 \\
P_{ges} = P_{R1} + P_{R2} &= \left(\frac{U_{Q1} - I_{Q2}R_2}{R_1 + R_2}\right)^2 R_1 + \left(\frac{U_{Q1} + I_{Q2}R_1}{R_1 + R_2}\right)^2 R_2
\end{aligned}$$

Bewertung: (1) Punkt für jede Teilleistung und (1) Punkt für die Summenleistung

3 Kirchhoff'sche Regeln (19 Punkte)



(a) Geben Sie für die o.g. Schaltung das Gleichungssystem an, das bei der Maschenstromanalyse entsteht. Vor Aufstellung formen Sie die Quellen ggf. in die jeweils geeignetste Form (Strom- oder Spannungsquelle) um!
Lösung: Die Schaltung kann bzw. sollte umgeformt werden, wie im folgenden zu sehen.



Es ergibt sich dann das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} R_1+R_2 & R_2 \\ R_2 & R_2+R_3+R_4+R_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{Q1}R_1 - U_{Q2} \\ I_{Q4}R_4 - U_{Q2} \end{pmatrix}$$

Bewertung: (5) Punkte insgesamt, Teilpunkte werden für einzelne richtige Matrix-Einträge gegeben

(b) Berechnen Sie alle Maschenströme!
Lösung: Umformung des Gleichungssystems mit Normierung der Zeilen ergibt erstmal

$$\left.\begin{array}{cc} 1 & \frac{R_2}{R_1+R_2} \\ 1 & \frac{R_2+R_3+R_4+R_5}{R_2} \end{array}\right| \begin{array}{c} \frac{I_{Q1}R_1-U_{Q2}}{R_1+R_2} \\ \frac{I_{Q4}R_4-U_{Q2}}{R_2} \end{array}$$

Und dann Subtraktion der ersten von der zweiten Zeile und wieder ausschreiben ergibt dann

$$\left(\frac{R_2 + R_3 + R_4 + R_5}{R_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) I_{M2} = \frac{I_{Q4}R_4 - U_{Q2}}{R_2} - \frac{I_{Q1}R_1 - U_{Q2}}{R_1 + R_2}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow I_{M2} &= \frac{I_{Q4}R_4(R_1 + R_2) - I_{Q1}R_1R_2 - U_{Q2}R_1}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3 + R_4 + R_5) - R_2^2} \\
I_{M1} &= \frac{I_{Q1}R_1 - U_{Q2}}{R_1 + R_2} - I_{M1}\frac{R_2}{R_1 + R_2} \\
\Rightarrow I_{M1} &= \frac{I_{Q1}R_1 - U_{Q2}}{R_1 + R_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2}\frac{I_{Q4}R_4(R_1 + R_2) - I_{Q1}R_1R_2 - U_{Q2}R_1}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3 + R_4 + R_5) - R_2^2}
\end{aligned}$$

Bewertung: Jeweils (2) Punkte für die richtigen Maschenströme

(c) Berechnen Sie alle Zweigströme als Funktion der Maschenströme und o.g. Größen!
Lösung: Die Ströme ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
R_1 &: I_1 = I_{Q1} - I_{M1} \\
R_2 &: I_2 = I_{M1} + I_{M2} \\
R_3 &: I_3 = I_{M2} \\
R_4 &: I_4 = I_{Q4} - I_{M2} \\
R_5 &: I_5 = I_{M2}
\end{aligned}$$

Bewertung: Für jeden Zusammenhang (1) Punkt, also zusammen (5) Punkte

(d) Es sei nun $R_1 = 1000\,\Omega,\ R_2 = 10\,\Omega,\ R_3 = R_5 = 1\,\Omega,\ R_4 = 1000\,\Omega$ sowie $U_{Q2} = 10\,\mathrm{V}$ und $I_{Q1} = 10\,\mathrm{mA}, I_{Q4} = 20\,\mathrm{mA}$.

Geben Sie alle Zweigströme an! Selbst wenn Sie Probleme mit den vorigen Teilaufgaben hatte, versuchen Sie es, gerne in einem von Ihnen gewählten Verfahren!
Lösung: Dazu bestimmt man zuerst einmal die Maschenströme und verwendet ggf. die Abkürzungen

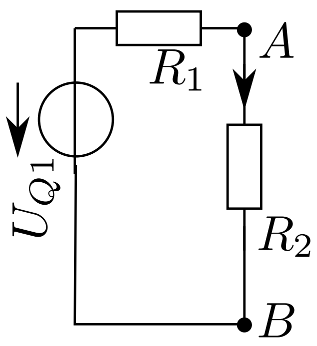
$$\begin{aligned}
N &= (R_1 + R_2)(R_2 + R_3 + R_4 + R_5) - R_2^2 = (1010 \times 1012 - 100)\,\Omega^2 \\
&= 1,02202 \times 10^6\,\Omega^2 \\
I_{Q4}R_4(R_1 + R_2) &= 10\,\mathrm{mA} \times 2000\,\Omega \times 1010\Omega = 20200\,\mathrm{V}\Omega \\
I_{Q1}R_1R_2 &= 10\,\mathrm{mA} \times 1000\,\Omega \times 10\Omega = 100\,\mathrm{V}\Omega \\
U_{Q2}R_1 &= 10000\,\mathrm{V}\Omega \\
I_{Q1}R_1 - U_{Q2} &= 0\,\mathrm{V}\Omega \\
\frac{R_1}{R_1 + R_2} &= \frac{10}{1010} = 0,00990099
\end{aligned}$$

Und dann haben wir für die Maschenströme und schließlich als Ergebnis dann

$$\begin{aligned}
I_{M1} &= -97,8\,\mu\mathrm{A} & I_{M2} &= 9,88\,\mathrm{mA} \\
I_1 &\approx 1,0098\,\mathrm{mA} & I_2 &= 9,978\,\mathrm{mA} \\
I_4 &= 10,12\,\mathrm{mA} & I_3 = I_5 &= 9,88\,\mathrm{mA}
\end{aligned}$$

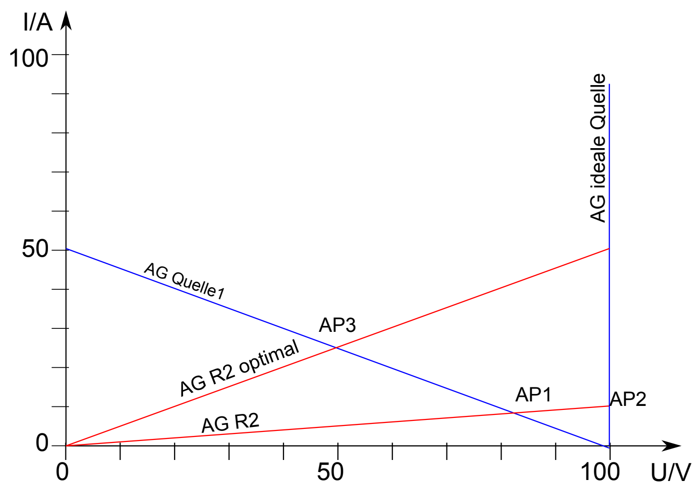
Bewertung: (1) Punkt für jeden richtigen Wert der Zweigströme, also (5) Punkte, ggf. Teilpunkte, wenn wenigstens die Maschenströme richtig sind.

4 Graphische Lösungen (10 Punkte)



In obiger Schaltung sind $U_{Q1} = 100\,\mathrm{V},\ R_1 = 2\,\Omega,\ R_2 = 10\,\Omega$.

(a) Zeichnen Sie die Arbeitsgeraden bzgl. der Punkte A-B der Quelle (links) und des Verbrauchers (rechts)! Verwenden Sie Lineal und/ oder Geodreieck!
Lösung: Das Ergebnis (aus für die weiteren Aufgaben) findet sich in folgender Graphik:



(b) Geben Sie den Arbeitspunkt an!
Lösung: Siehe Graphik, AP1 is definiert durch $U = 83,33\,\mathrm{V},\ I = 8,33\,\mathrm{A}$

Bewertung: (2) Punkte insgesamt

(c) Geben Sie den AP (natürlich auch die entsprechenden Geraden) an, wenn die Spannungsquelle ideal wäre!
Lösung: Siehe Graphik, AP2 is definiert durch $U = 100\,\mathrm{V},\ I = 10\,\mathrm{A}$

Bewertung: (2) Punkte insgesamt

(d) Plötzlich ändert sich die Last, so dass die maximale mögliche Leistung in R_2 verbracht werden kann. Wie groß ist nun R_2 und wie ändert sich der AP, geben Sie ihn (und die zugehörigen Geraden) an!
Lösung: Siehe Graphik AP3 is definiert durch $U = 50\,\mathrm{V}$, $I = 25\,\mathrm{A}$, $R_2 = R_2 = 2\,\Omega$

Bewertung: (3) Punkte insgesamt

(e) Geben Sie nun für all drei angesprochenen Fälle die Wirkungsgrade an!
Lösung: Die Wirkungsgrade sind

1: $\eta = 83,3\,\%$
2: $\eta = 100\,\%$
3: $\eta = 50\,\%$

Bewertung: (3) Punkte insgesamt