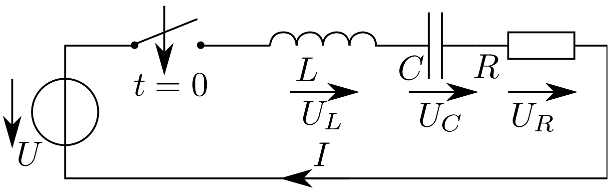
Grundlagen der Elektrotechnik I
Duale Hochschule Karlsruhe

Dozent: Prof. Dr.-Ing. Gerald Oberschmidt

11 Start und Langzeitbedingungen

11.1 RLC in Serie



Bestimmen Sie Strom und alle Spannungen kurze Zeit und lange Zeit nach Schließen des Schalters. Beschreiben Sie den Übergang qualitativ!

Lösung: Unmittelbar nach Schließen des Schalters beginnt die Kapazität geladen zu werden, jedoch wird der Stromfluss durch die Induktivität gehemmt. Der Widerstand sorgt in jedem Fall für realistische Verhältnisse.

Unmittelbar nach Schließen des Schalters fällt alle Spannung an der Induktivität ab, es gilt also

$$U_C = U_R = 0, \qquad U_L = U$$
$$I = 0$$

Allerdings wird sich der Strom ändern, denn es gilt

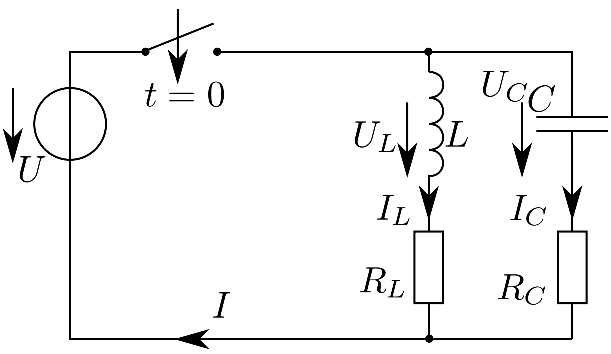
$$\frac{dI}{dt} = \frac{U_L}{L}$$

und so kann schon kurz nach Schließen des Schalters ein Strom fließen, der erstmal nur durch die Induktivität bestimmt wird. Etwas später beginnen R und C in das Geschehen einzugreifen. Nach langer Zeit ist die Kapazität geladen, hierdurch wird kein Strom mehr fließen, es gilt dann also

$$U_R = U_L = 0, \qquad U_C = U,$$
$$I = 0.$$

Änderungsbetrachtungen des Stromes machen keinen Sinn mehr.

11.2 LC parallel geschaltet



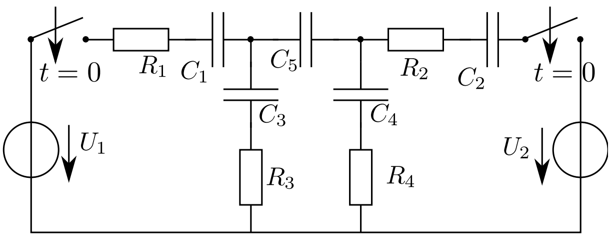
Bestimmen Sie die eingezeichneten Ströme und Spannungen unmittelbar und lange nachdem der Schalter geschlossen wurde.
Lösung: Durch die ideale Spannungsquelle zerfällt die Schaltung in die beiden Zweige, die unabhängig von einander betrachtet werden können.
Unmittelbar nach Schließen des Schalters wird die Kapazität alle verfügbare Ladung auf sich ziehen, der Strom durch sie wird durch den Widerstand R_C begrenzt. Umgekehrtes liegt bei der Induktivität vor, hier muss erst der Stromfluss in Gang kommen. Es gilt also

$$U_C = 0, \qquad I_C = \frac{U}{R_C},$$
$$U_L = U, \qquad I_L = 0,$$
$$I = \frac{U}{R_C}.$$

Nach langer Zeit fällt dann keine Spannung mehr an der Induktivität ab, dafür aber an der Kapazität, es gilt dann

$$U_C = U, \qquad I_C = 0,$$
$$U_L = 0, \qquad I_L = \frac{U}{R_L},$$
$$I = \frac{U}{R_L}.$$

11.3 Netzwerk aus Kapazitäten und Widerständen



Die beiden Schalter werden zur gleichen Zeit geschlossen. Bestimmen Sie die Spannungen unmittelbar nach Schließen der Schalter und lange Zeit danach. Die Elemente haben die Werte $U_1 = 10\,\mathrm{V}, U_2 = 20\,\mathrm{V}$, $R_1 = R_2 = 1\,\Omega$, $R_3 = R_4 = 2\,\Omega$, $C_1 = C_2 = 1\,\mu\mathrm{F}$, $C_3 = C_4 = 2\,\mu\mathrm{F}$, $C_5 = 1\,\mu\mathrm{F}$.
Lösung: Unmittelbar nach Schließen des Schalters liegt ein reines Widerstandsnetzwerk aus R_1 bis R_4 vor. Insbesondere C_5 verbindet die beiden Netzwerkteile durch großen ermöglichten Stromfluss.
Ein Lösungsansatz geht z.B. über den Überlagerungssatz. Mit U_1 wirksam ergibt sich R_{234} als Parallelschaltung der indizierten Widerstände zu

$$\frac{1}{R_{234}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{R_2R_3 + R_2R_4 + R_3R_4}{R_2R_3R_4} = 2\,\frac{1}{\Omega}$$
$$R_{234} = 0{,}5\,\Omega.$$

Und damit sind die Spannungsabfälle

$$U_{R31} = U_{R41} = U_{R21} = \frac{0{,}5}{1{,}5} U_1 = 3{,}3333\,\mathrm{V}, \qquad U_{R11} = 6{,}667\,\mathrm{V},$$

wobei die Pfeilrichtung immer von C_5 aus zählt. Mit U_2 wirksam ergibt sich

$$\begin{aligned} R_{134} &= \frac{R_1R_3 + R_1R_4 + R_3R_4}{R_1R_3R_4} = 2\,\frac{1}{\Omega}, \\ R_{134} &= 0{,}5\,\Omega. \end{aligned}$$

Und es ergeben sich die Spannungen

$$U_{R12} = U_{R32} = U_{R42} = \frac{0{,}5}{1{,}5} U_2 = 6{,}6667\,\mathrm{V}, \qquad U_{R22} = 13{,}333\,\mathrm{V},$$

wiederum mit den Pfeilrichtungen von C_5 aus.
Überlagert ergibt sich also

$$\begin{aligned} U_{R1} &= U_{R11} - U_{R12} = 0, & U_{R2} &= U_{R21} - U_{R22} = -10\,\mathrm{V}, \\ U_{R3} &= U_{R31} + U_{R32} = 10\,\mathrm{V}, & U_{R4} &= U_{R41} + U_{R42} = 10\,\mathrm{V}. \end{aligned}$$

Die Spannungsabfälle über den Kapazitäten sind alle Null und es wird nochmal hervorgehoben, dass aus Quelle U_1 kein Strom entnommen wird.
Lange Zeit nach Schließen des Schalters sind die Kapazitäten geladen und es fließt kein Strom mehr, so dass an keinem der Widerstände eine Spannung abfällt. Es folgt damit ein reines Kapazitäten Netzwerk. Auch hier bietet sich der Überlagerungssatz an. Mit U_1 aktiv ergibt sich

$$\begin{aligned} C_{24} &= C_2 + C_4 = 3\,\mu\mathrm{F}, & C_{524} &= \frac{C_5C_{24}}{C_5 + C_{24}} = 750\,\mathrm{nF}, \\ C_{3542} &= C_3 + C_{524} = 2{,}75\,\mu\mathrm{F}, & C_{13542} &= \frac{C_1C_{3542}}{C_1 + C_{3542}} = 733{,}3\,\mathrm{nF}. \end{aligned}$$

darauf befindet sich die Gesamtladung (durch U_1) von

$$Q_{ges1} = U_1 C_{13542} = 7{,}333\,\mu\mathrm{As}.$$

Und diese teilt sich nun auf mit

$$\begin{aligned} Q_{11} &= Q_{35421} = Q_{ges1} = 7{,}333\,\mu\mathrm{As} \\ Q_{31} &= \frac{C_3}{C_3 + C_{524}} Q_{ges1} = 5{,}3333\,\mu\mathrm{As} \\ Q_{51} = Q_{5241} = Q_{241} &= Q_{11} - Q_{31} = 2\,\mu\mathrm{As} \\ Q_{41} &= \frac{C_4}{C_2 + C_4} Q_{241} = 1{,}3333\,\mu\mathrm{As} \\ Q_{21} &= \frac{C_2}{C_2 + C_4} Q_{241} = 0{,}6667\,\mu\mathrm{As}, \end{aligned}$$

jeweils der letzte Index steht für die aktive Quelle. Für die Spannungen wären nicht alle einzelnen Ladungen nötig gewesen, aber es schadet auch nichts. Die Spannungen ergeben sich dann jeweils durch Multiplikation mit der Kapazität und es ist

$$U_{11} = \frac{Q_{11}}{C_1} = 7{,}333\,\mathrm{V}, \qquad U_{21} = U_{41} = \frac{Q_{41}}{C_4} = 0{,}6667\,\mathrm{V},$$
$$U_{31} = \frac{Q_{31}}{C_3} = 2{,}667\,\mathrm{V}, \qquad U_{51} = \frac{Q_{51}}{C_5} = 2\,\mathrm{V},$$

wobei alle Pfeile nach rechts bzw. nach unten zeigen.
Mit U_2 aktiv folgt dann

$$C_{13} = C_1 + C_3 = 3\,\mu\mathrm{F}, \qquad C_{513} = \frac{C_5 C_{13}}{C_5 + C_{13}} = 750\,\mathrm{nF},$$
$$C_{4513} = C_4 + C_{513} = 2{,}75\,\mu\mathrm{F}, \qquad C_{24513} = \frac{C_2 C_{4513}}{C_2 + C_{4513}} = 733{,}3\,\mathrm{nF},$$

was natürlich aufgrund der Symmetrie des Netzwerkes genau wie im ersten Fall ist. Weiter ergeben sich dann die einzelnen Ladungen aus der Symmetrie, allerdings bei doppelter Spannung nun doppelt. Das kann aber übergangen werden, weil die gleiche Symmetrie für die Spannungen gilt. Es ist dann:

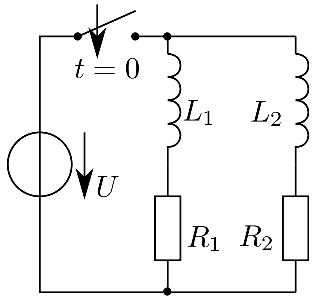
$$U_{22} = 2U_{11} = 14{,}667\,\mathrm{V}, \qquad U_{12} = U_{32} = 2U_{21} = 1{,}3333\,\mathrm{V},$$
$$U_{42} = 2U_{31} = 5{,}3333\,\mathrm{V}, \qquad U_{52} = 2U_{51} = 4\,\mathrm{V},$$

wobei hier allerdings die Pfeile von rechts nach links und von oben nach unten gehen.
Unter Berücksichtigung der Pfeile ergeben sich dann die Spannungen

$$U_{C1} = U_{11} - U_{12} = 6\,\mathrm{V}, \qquad U_{C2} = U_{21} - U_{22} = -14\,\mathrm{V},$$
$$U_{C3} = U_{31} + U_{32} = 4\,\mathrm{V}, \qquad U_{C4} = U_{41} + U_{42} = 6\,\mathrm{V},$$
$$U_{C5} = U_{51} - U_{52} = -2\,\mathrm{V},$$

mit nun wieder allen Pfeilen nach rechts bzw. unten.

11.4 Parallele Spulen



Bestimmen Sie die Spannungen und Ströme bzw. mindestens deren Verhältnis bei den gezeigten zwei parallelen Spulen (Induktivität mit ohmschem Verlust) kurz nach Zuschalten der Quelle

und nachdem diese Quelle lange eingeschaltet war.
Lösung: Wir beginnen mit dem einfach Fall, nämlich dem, wenn die Quelle lange eingeschaltet war, dann sind die Induktivitäten kein Widerstand mehr für den Strom und man erhält sofort

$$U_{L1} = U_{L2} = 0, \qquad U_{R1} = U_{R2} = U,$$
$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \qquad I_2 = \frac{U}{R_2},$$
$$I = U\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}.$$

Die Situation beim Einschalten ist etwas unübersichtlicher. Hier gilt natürlich, dass die Zweigspannungen an den Induktitäten abfallen, also

$$U_{L1} = U_{L2} = U, \qquad U_{R1} = U_{R2} = 0$$

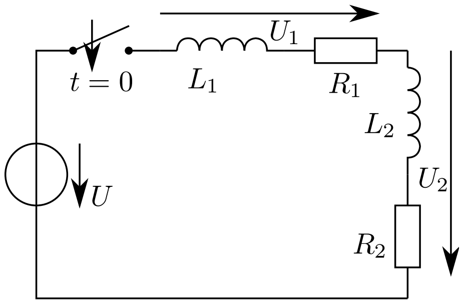
folgt. Und damit kann über die Ströme

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{U}{L_1}, \qquad \frac{dI_2}{dt} = \frac{U}{L_2}$$

ausgesagt werden. Gleichzeitig ergibt sich an dem Knoten

$$I = I_1 + I_2, \qquad \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} = U\left(\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}\right)^{-1},$$
$$\Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{L_2}{L_1}, \qquad \frac{I_1}{I} = \frac{L_2}{L_1 + L_2}, \qquad \frac{I_2}{I} = \frac{L_1}{L_1 + L_2}.$$

11.5 Serielle Spulen



Bestimmen Sie die Spannungen über den (realen) Spulen (Induktivität mit ohmschem Verlust) kurz nach Zuschalten der Quelle und nachdem diese Quelle lange eingeschaltet war.
Lösung: Wir beginnen mit dem einfach Fall, nämlich dem, wenn die Quelle lange eingeschaltet war, dann sind die Induktivitäten kein Widerstand mehr für den Strom und man erhält sofort

$$U_1 = U\frac{R_1}{R_1 + R_2}, \qquad U_2 = U\frac{R_2}{R_1 + R_2}, \qquad I = \frac{U}{R_1 + R_2}.$$

Kurz nach dem Einschalten fließt zunächst einmal kein Strom, da die Induktivitäten dieses noch nicht zulassen. Über den Widerständen fällt daher keine Spannung ab, aber über den Induktivitäten hat man dann

$$U_1 = U_{L1} = L_1\frac{dI}{dt}, \qquad U_2 = U_{L2} = L_2\frac{dI}{dt},$$

woraus sich zumindest der Anstieg des Stromes bestimmen lässt. Da dieser Anstieg des Stromes im ganzen Kreis gleich sein muss folgt sofort

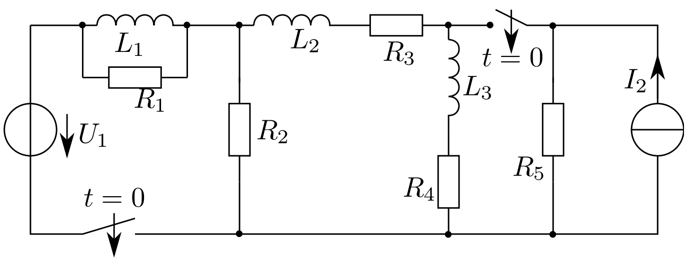
$$\frac{U_1}{L_1} = \frac{U_2}{L_2} \qquad \Leftrightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{L_1}{L_2}$$

was der ganz normale Spannungsteiler ist, es also auf

$$U_1 = U\frac{L_1}{L_1 + L_2}, \qquad U_2 = U\frac{L_2}{L_1 + L_2}, \qquad I = 0$$

führt.

11.6 Netzwerk von Induktivitäten



Bestimmen Sie in dem o.g. Netzwerk die Spannungen und Ströme kurz nach dem gleichzeitigen Schließen der Schalter und lange Zeit danach. In letzterem Fall bestimmen Sie auch die auf den Induktivitäten und insgesamt gespeicherte Energie im System. Die Elementwerte sind $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $L_1 = 1\,\mathrm{mH}$, $R_2 = 100\,\Omega$, $L_2 = 2\,\mathrm{mH}$, $R_3 = 1\,\Omega$, $L_3 = 10\,\mathrm{mH}$, $R_4 = 5\,\Omega$, $R_5 = 10\,\Omega$, $U_1 = 10\,\mathrm{V}$, $I_2 = 1\,\mathrm{A}$.

Lösung: Kurz nach dem Schließen der Schalter sind die Induktivitäten sehr hochohmig. So trennt L_2 die beiden Netzwerkteile voneinander und links ergibt sich ein Spannungsteiler aus R_1,R_2, und rechts fließt aller Quellenstrom über R_5. So dass sich

$$U_{R5} = U_{L3} = I_2 R_5 = 10\,\mathrm{V}, \qquad U_{R1} = U_{L1} = U_1\frac{R_1}{R_1 + R_2} = 9{,}091\,\mathrm{V},$$

$$U_{R2} = U_1\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0{,}9091\,\mathrm{V} \qquad U_{L2} = -U_{R2} + U_{R5} = -U_1\frac{R_2}{R_1 + R_2} + I_2 R_5 = 9{,}091\,\mathrm{V},$$

$$U_{R3} = U_{R4} = 0.$$

Wenn die Schalter schon lange geschlossen sind, können die Induktivitäten als Kurzschlüsse betrachtet werden, und es ergibt sich das rein resistive Netzwerk ohne R_1. Durch „hinsehen“ kann man die Parameter am besten im Überlagerungsverfahren bestimmen. Mit U_1 aktiv ist dann

$$U_{21} = U_1 = 10\,\mathrm{V}, \qquad I_{21} = 100\,\mathrm{mA}$$

unnmittelbar und egal was I_2 noch macht. Es bleibt dann noch

$$\begin{aligned}
R_{345} &= R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = 4{,}333\,\Omega,\\
U_{3451} &= U_1 = 10\,\mathrm{V},\\
I_{3451} &= \frac{U_{3452}}{R_{345}} = 2{,}308\,\mathrm{A},\\
I_{ges1} = I_{R11} &= I_{3451} + \frac{U_1}{R_2} = 2{,}408\,\mathrm{A},\\
I_{41} &= I_{3451}\frac{R_5}{R_4 + R_5} = 1{,}539\,\mathrm{A},\\
I_{51} &= I_{3451}\frac{R_4}{R_4 + R_5} = 0{,}7693\,\mathrm{A},\\
U_{41} = U_{51} &= I_{41} R_4 = 7{,}693\,\mathrm{V}\\
U_{31} &= U_1 - U_{41} = 2{,}307\,\mathrm{V}.
\end{aligned}$$

Alle Pfeile gehen nach rechts bzw. unten. Mit I_2 aktiv ist dann (I_2, R_5 wird in Spannungsquelle umgewandelt)

$$\begin{aligned}
R_{12} &= 0\,\Omega,\ \ L_1{,}U_1 \text{überbrücken alles}\\
R_{123} &= R_{12} + R_3 = 1\,\Omega,\\
R_{1234} &= \frac{R_4 R_{123}}{R_4 + R_{123}} = 0{,}8333\,\Omega,\\
R_{12345} &= R_5 + R_{1234} = 10{,}8333\,\Omega.
\end{aligned}$$

Nun können die Spannungen berechnet werden. Dann ist

$$\begin{aligned}
U_{42} = U_{32} &= I_2 R_5 \frac{R_{1234}}{R_5 + R_{1234}} = 0{,}7692\,\mathrm{V},\\
U'_{52} &= I_2 R_5 - U_{42} = 9{,}231\,\mathrm{V},\\
U_{12} = U_{22} &= 0.
\end{aligned}$$

Hier gehen alle Pfeile nach links bzw. unten. U'_{52} ist die Spannung um umgewandelten Widerstand R_5. an R_5 in Stromquellenform fallen $U_{52} = U_{42} = 0{,}7692\,\mathrm{V}$ ab.
Insgesamt hat man dann

$$\begin{aligned}
U_{R1} = U_{L1} &= 0,\\
U_{R2} &= U_1 = 10\,\mathrm{V},\\
U_{R3} &= U_{31} - U_{32} = 1{,}538\,\mathrm{V},\\
U_{R4} = U_{R5} &= U_{41} + U_{42} = 8{,}462\,\mathrm{V},
\end{aligned}$$

für die Spannungen und für die Ströme hat man

$$\begin{aligned}
I_{R2} &= \frac{U_{R2}}{R_2} = 100\,\text{mA},\\
I_{R3} = I_{L2} &= 1{,}538\,\text{A},\\
I_{L1} &= I_{R2} + I_{R3} = 1{,}638\,\text{A},\\
I_{R1} &= 0,\\
I_{R4} = I_{L3} &= 1{,}692\,\text{A},\\
I_{R5} &= 0{,}8462\,\text{A}.
\end{aligned}$$

Die gespeicherten Energien ergeben sich jeweils zu $W = \frac{1}{2}LI^2$ und damit ist dann

$$\begin{aligned}
W_1 &= 1{,}341\,\text{mJ},\\
W_2 &= 2{,}365\,\text{mJ},\\
W_3 &= 14{,}31\,\text{mJ},\\
W_{ges} &= W_1 + W_2 + W_3 = 18{,}02\,\text{mJ}.
\end{aligned}$$