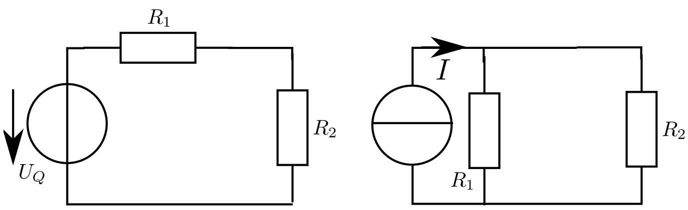
Grundlagen der Elektrotechnik I
Duale Hochschule Karlsruhe
Dozent: Prof. Dr.-Ing. Gerald Oberschmidt

3 Widerstand

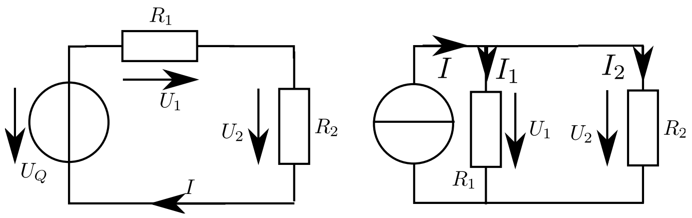
3.1 Spannungs- und Stromquellen

Betrachten Sie die gezeigten einfachen Schaltbilder einer realen Spannungs- und einer realen Stromquelle:



Spannungsquelle (links) und Stromquelle (rechts) mit Innen- und Last-Widerstand.

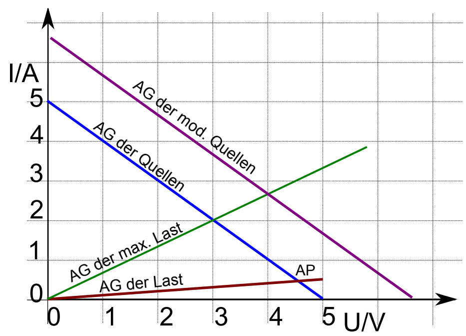
(a) Bezeichnen Sie mit sinnvoll gerichteten Pfeilen alle auftretenden Spannungen und Ströme!
Lösung:



Spannungsquelle (links) und Stromquelle (rechts) mit Innen und Last-Widerstand inklusive der Pfeile für relevante Größen.

(b) In der Spannungsquelle seien $U_Q = 5\,\text{V}$, $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$.

i. Zeichnen Sie die Arbeitsgeraden der Spannungsquelle!
Lösung:



Arbeitsgeraden der Quellen und der Last.

ii. Bestimmen Sie I und $R_{1,I}$ sowie $R_{2,I}$ der äquivalenten Stromquelle! Zeichnen Sie auch hier die Arbeitsgeraden (in dasselbe Diagramm).
Lösung: Kurzschlussstrom der Spannungsquelle ist $I_K = U_Q/R_1 = 5\,\mathrm{V}/1\,\Omega = 5\,\mathrm{A} = I$ und der Innenwiderstand der Stromquelle muss so bemessen sein, dass bei Leerlauf (der Stromquelle) die gleiche Spannung an ihm abfällt, also $U_Q = I_K \times R_{1,I} \Leftrightarrow R_{1,I} = \frac{U_Q}{U_Q/R_1} = R_1 = 1\,\Omega$. R_2 bleibt natürlich vollkommen unberührt.

iii. Geben Sie den Arbeitspunkt an, also Strom und Spannung, die sich an der Last einstellen!
Lösung: Abgelesen in etwa 4,5V und 0,5A für Spannung und Strom am Arbeitspunkt. Genaue Berechnung ist: $I_2 = \frac{U_Q}{R_1+R_2} = \frac{5}{11}\,\mathrm{A} = 0{,}\overline{45}\,\mathrm{A}$ und die Spannung ist entsprechend $U_2 = I_1 \times R_2 = \frac{50}{11}\,\mathrm{V} = 4{,}\overline{54}\,\mathrm{V}$

(c) Welcher Widerstand R_2 darf minimal angeschlossen werden, wenn die Spannung an ihm nicht unter 3 V sinken darf?
Lösung: Grafische Lösung siehe oben: Bei 3 V fließen demnach 2 A, der Widerstand $R_{2.min} = 1{,}5\,\Omega$.

Oder rechnerisch $U_{2,min} = 3\,\mathrm{V} = \frac{U_Q R_{2,min}}{R_1+R_{2,min}} \Leftrightarrow R_{2,min} = \frac{U_{2,min}}{U_Q-U_{2,min}} R_1 = 1{,}5\,\Omega$

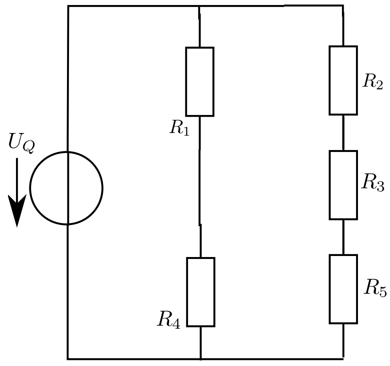
(d) Wie hoch muss der Kurzschlussstrom der Stromquelle (oder natürlich auch der Spannungsquelle) sein, wenn bei dem unter (c) berechneten Widerstand an demselben noch eine Spannung von 4,0 V abfallen soll (Der Innenwiderstand wird nicht verändert!)?
Lösung: Grafisch ist dieses eine Parallelverschiebung der Arbeitsgerade der Quelle. Macht man das, so kann man ablesen, dass $I_K \approx 6{,}7\,\mathrm{A}$, $U_0 \approx 6{,}7\,\mathrm{V}$ sein muss.

Rechnerisch geht es ähnlich: Es muss gelten $I_2 = U/R_{2,min} = 4\,\mathrm{V}/1{,}5\,\Omega = \frac{8}{3}\,\mathrm{A}$ und damit bei gleichem Spannungsabfall über dem Innenwiderstand der Stromquelle $I_1 = 4\,\mathrm{A}$ Der Kurzschlussstrom der Quelle ist somit $I_K = I_1 + I_2 = \left(\frac{8}{3}+4\right)\,\mathrm{A} = 6\frac{2}{3}\,\mathrm{A} = 6{,}\overline{6}\,\mathrm{A}$. Leerlaufspannung der Quelle entsprechend $U_Q = 6\frac{2}{3}\,\mathrm{V}$.

(e) Ihnen steht eine Spannungsquelle mit einer Leerlaufspannung von 100 V zur Verfügung. Was müssten Sie tun um diese Quelle als Stromquelle für Ströme von 10 mA +/-1% für Lasten von 1 bis 100 Ω zu nutzen?
Lösung: Damit 10 mA bei Kurzschluss fließen muss der Innenwiderstand der Spannungsquelle $R_1 = 10\,\mathrm{k}\Omega$ betragen. Bei einer Last von 100 Ω fließen dann $I_2 = \frac{U_q}{R_1+R_2} = \frac{100\,\mathrm{V}}{10\,100\,\Omega} \approx 9{,}901\,\mathrm{mA}$, also etwas weniger als 1% weniger als gefordert. Optimiert kann man natürlich auch den Innenwiderstand zu 9950 Ω wählen, dann wird der Toleranzbereich besser ausgenutzt.

3.2 Pfeile, Maschen und Zweige

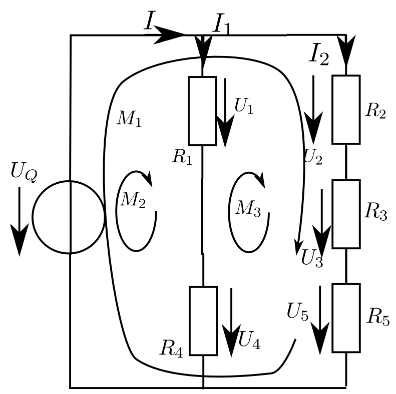
Betrachten Sie den gezeigten generischen Gleichstromkreis!



Zu Berechnender Gleichstromkreis

Folgende Werte sind gegeben: $U_Q = 100\,\mathrm{V}$, $R_1 = 1000\,\Omega$, $R_2 = 100\,\Omega$, $R_3 = 300\,\Omega$, $R_4 = 3000\,\Omega$, $R_5 = 600\,\Omega$

(a) Bezeichnen Sie sämtliche (unterschiedlichen) Ströme und Spannungen!
Lösung:



(b) Berechnen Sie die oben bezeichneten Ströme und Spannungen!
Lösung: $U_1 = 25\,\mathrm{V}$, $U_4 = 75\,\mathrm{V}$, $I_1 = 25\,\mathrm{mA}$
$U_2 = 10\,\mathrm{V}$, $U_3 = 30\,\mathrm{V}$, $U_5 = 60\,\mathrm{V}$, $I_2 = 100\,\mathrm{mA}$
$I = 125\,\mathrm{mA}$

(c) Bezeichnen Sie die unterschiedlichen Zweige und Maschen! Wieviele Zweige und wieviele Maschen gibt es?
Lösung: Siehe Zeichnung oben, es gibt genau zwei Knoten, 3 Zweige hat und es gibt drei Maschen.

(d) Stellen Sie die Maschengleichungen auf, sowohl als Formeln als auch mit Zahlenwerten!
Lösung:

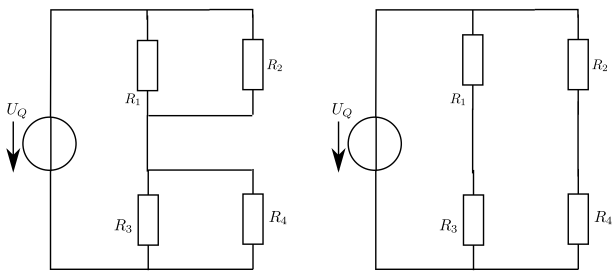
$$
\begin{aligned}
M_1 &: U_Q = U_2 + U_3 + U_5 \Rightarrow 100\,\mathrm{V} = 10\,\mathrm{V} + 30\,\mathrm{V} + 60\,\mathrm{V} \\
M_2 &: U_Q = U_1 + U_4 \Rightarrow 100\,\mathrm{V} = 25\,\mathrm{V} + 75\,\mathrm{V} \\
M_3 &: U_1 + U_4 = U_2 + U_3 + U_5 \Rightarrow 25\,\mathrm{V} + 75\,\mathrm{V} = 10\,\mathrm{V} + 30\,\mathrm{V} + 60\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

(e) Stellen Sie die Knotengleichungen auf!
Lösung:

$$K_1 \quad : \quad I = I_1 + I_2 \Rightarrow 125\,\text{mA} = 100\,\text{mA} + 25\,\text{mA}$$
$$K_2 \quad : \quad I_1 + I_2 = I \Rightarrow 100\,\text{mA} + 25\,\text{mA} = 125\,\text{mA}$$

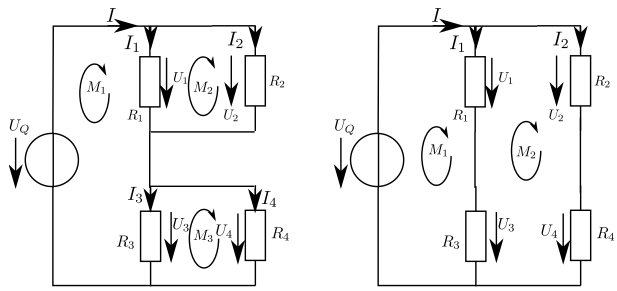
3.3 Serien und Paralleschaltung/ Brückenschaltung

Zwei Schaltungen gemäß Schaltbild sind gegeben:



Parallelschaltung (links) und Serienschaltung von Widerständen

(a) Bezeichnen Sie alle Ströme und Spannungen sowie identifizieren Sie unabhängige Maschen in beiden Schaltungen!
Lösung:



Parallelschaltung (links) und Serienschaltung von Widerständen

(b) Geben Sie die Maschen und Knotengleichungen an!
Lösung:

i. Für die Parallelschaltung gilt:

$$M_1: \; U_Q = U_1 + U_3 = U_2 + U_4, \quad M_2: \; U_1 = U_2, \quad M3: \; U_3 = U_4$$
$$K_1: \; I = I_1 + I_2, \quad K_2: \; I = I_3 + I_4, \quad K_3: \; I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$

ii. Für die Serienschaltung gilt:

$$M_1: \; U_Q = U_1 + U_3, \quad M2: \; U_1 + U_3 = U_2 + U_4 \quad K_1: \; I = I_1 + I_2$$

(c) Geben Sie sämtliche Ströme und Spannungen in beiden Schaltungen an, der Gesamtwiderstand darf z.B. mit R_{ges} abgekürzt werden!
Lösung:

i. Parallelschaltung (links): Für den Gesamtwiderstand, den die Spannungsquelle sieht ergibt sich:

$$\begin{aligned} R_{ges} &= \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4} = \frac{R_1R_2(R_3+R_4)+R_3R_4(R_1+R_2)}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)} \\ &= \frac{R_1R_2R_3+R_1R_2R_4+R_1R_3R_4+R_2R_3R_4}{R_1R_3+R_2R_3+R_1R_4+R_2R_4} \end{aligned}$$

Und mit dieser Abkürzung ist dann

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U_Q}{R_{ges}} \times \frac{R_2}{R_1+R_2}, & I_2 &= \frac{U_Q}{R_{ges}} \times \frac{R_1}{R_1+R_2}, \\ U_1 = U_2 &= \frac{U_Q}{R_{ges}} \times \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} & &= U_Q\frac{R_1R_2(R_3+R_4)}{R_1R_2(R_3+R_4)+R_3R_4(R_1+R_2)} \\ I_3 &= \frac{U_Q}{R_{ges}} \times \frac{R_4}{R_3+R_4}, & I_4 &= \frac{U_Q}{R_{ges}} \times \frac{R_3}{R_3+R_4}, \\ U_3 = U_4 &= \frac{U_Q}{R_{ges}} \times \frac{R_3R_4}{R_3+R_4} & &= U_Q\frac{R_3R_4(R_1+R_2)}{R_1R_2(R_3+R_4)+R_3R_4(R_1+R_2)} \\ I &= \frac{U_Q}{R_{ges}} \end{aligned}$$

ii. Etwas einfacher in der Serienschaltung: Wiederum der Gesamtwiderstand aus Sicht der Quelle

$$R_{ges} = (R_1+R_3)||(R_2+R_4) = \frac{R_1R_2+R_1R_4+R_2R_3+R_3R_4}{R_1+R_2+R_3+R_4}$$

Und mit dieser Abkürzung ist dann

$$\begin{aligned} U_1 &= U_Q\frac{R_1}{R_1+R_3}, & U_2 &= U_Q\frac{R_2}{R_2+R_4}, \\ U_3 &= U_Q\frac{R_3}{R_1+R_3}, & U_4 &= U_Q\frac{R_4}{R_2+R_4}, \\ I_1 &= \frac{U_Q}{R_1+R_3}, & I_2 &= \frac{U_Q}{R_2+R_4} \\ I &= \frac{U_Q}{R_{ges}} \end{aligned}$$

(d) Unter welchen Umständen sind die Spannungen und Ströme über bzw. durch den jeweils gleich bezeichneten Widerständen in beiden Schaltbildern gleich?
Lösung: Man schaue sich nur die einzelnen Schaltungen (immer noch separat) an und übertrage Forderungen der einen auf die andere. So muss nun einfach überall gelten:

$$U_1 = U_2,\ U_3 = U_4,\ I_1 = I_3,\ I_2 = I_4$$

bzw. elektrisch heißt das, dass in der Parallelschaltung R_2 und R_4 miteinander verbunden werden dürfen, ohne dass etwas passiert, bzw. dass in einer Leitung in der Serienschaltung zwischen den Punkten zwischen R_1 und R_3 und entsprechend R_2 und R_4 kein Strom fließen würde.

Betrachtet man nun nur die Serienschaltung und nutzt obige Gleichungen aus, so ergibt sich:

$$U_1 = U_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{R_1}{R_1 + R_3} = \frac{R_2}{R_2 + R_4}$$
$$U_3 = U_4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_4}{R_2 + R_4}$$

Dividiert man diese beiden Gleichungen durcheinander so kürzen sich jeweils die Widerstandssummen der Nenner weg und es ergibt sich

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}.$$

Was nun auch noch beliebig umgeformt werden kann. Dieses ist die Abgleichbedingung für eine Wheatstone'sche Brückenschaltung.

3.4 Einschalten einer Glühlampe

Der Einschaltvorgang einer Glühlampe bei 230 V mit einer Leistungsaufnahme von 100 W soll betrachtet werden. Folgende Werte für den spezifischen Widerstand liegen vor (Quelle: WHS Sondermetalle, abgerufen am 15.1.2011 unter http://www.whs-sondermetalle.de). Die Betriebstemperatur sei 2000°C.

Temperatur in °C	ρ in $\mu\Omega$m
20	0,055
1000	0,326
1500	0,486
2000	0,671

(a) Nehmen Sie an, dass die Glühlampe mit Gleichstrom betrieben wird (was natürlich normalerweise nicht passiert). Welcher Strom fließt durch die Wendel der Lampe?
Lösung: Der Strom ist gegeben durch die Leistung $I = P/U = 100\,\mathrm{W}/230\,\mathrm{V} = 435\,\mathrm{mA}$

(b) Welchen Widerstand hat die Wendel der Lampe im Betrieb?
Lösung: Das ergibt sich nun aus dem Ohmschen Gesetz mit $R = U/I = 230\,\mathrm{V}/0{,}435\,\mathrm{A} = 529\,\Omega$

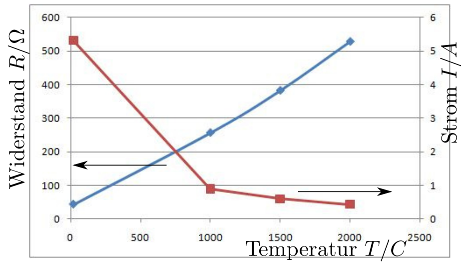
(c) Der Durchmesser der Wendel sei $40\,\mu$m. Wie groß muss die Länge sein, um bei Betriebstemperatur den unter (b) berechneten Widerstand zu haben?
Lösung:

Temperatur in °C	Temp. in K	ρ in $\mu\Omega$m	$\rho/\rho_{2000°C}$	R in Ω	Strom in A
20	293,15	0,055	0,0819	43,4	5,31
1000	1293,15	0,326	0,486	257	0,895
1500	1793,15	0,486	0,724	383	0,600
2000	2273,15	0,671	1,0	529	0,435

Querschnitt des Drahtes ist $A = \pi(d/2)^2 = \pi(20\,\mu\mathrm{m})^2 = 1{,}256 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}^2 = 0{,}001256\,\mathrm{mm}^2$
Für den Widerstand gilt $R = \rho\frac{l}{A} \Leftrightarrow l = \frac{R}{\rho}A = \frac{529\,\Omega}{0{,}671\times10^{-6}\,\Omega\mathrm{m}}1{,}256 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}^2 = 0{,}99\,\mathrm{m}$.
Die Wendel muss also 99 cm lang sein.

(d) Berechnen Sie nun die Widerstände bei den in der Aufgabenstellung angegebenen Temperaturen!
Lösung: Siehe Lösung zu (c). Weg war zunächst die spezifischen Widerstände auf den spezifischen Widerstand bei Betrieb zu normieren und dann die Widerstände entsprechend zu skalieren.

(e) Zeichnen Sie den Widerstand und den Strom über der Temperatur in ein (bzw. zwei) Diagramme!
Lösung: Folgendes Diagramm:



(f) Welche Energie wird verbraucht, wenn während des Einschaltvorganges jede der drei unteren Temperaturstufen in jeweils 5 ms durchfahren wird?
Lösung: Zwischenrechnung (dient nur zur Plausibilisierung der Größenordnungen) : Gewicht der Wolframwendel ist $m = V \times d = A \times l \times d$ wobei $d = 19{,}3\,\mathrm{g/cm}^3$ die Dichte ist. Masse ist also: $m = 1{,}24\times10^{-9}\,\mathrm{m}^3 19{,}3\,\mathrm{g/cm}^3 = 24\,\mathrm{mg}$. Die spezifische Wärmekapazität beträgt $w = 0{,}13\,\mathrm{J/(gK)} = 130\,\mathrm{J/(kgK)}$. Um die Wendel auf 2000°C zu erwärmen werden also ca. $W_{\Delta T} = mw\Delta T$ und damit dann $W_{1980} = 24 \times 10^{-6}\,\mathrm{kg} \times 1980\,\mathrm{K} \times 130\,\mathrm{J/(kgK)} = 7{,}03\,\mathrm{J}$ benötigt.

- Bei 20°C $W_{20°C} = UI_{20°C}t = 230\,\mathrm{V} \times 5{,}31\,\mathrm{A} \times 5\,\mathrm{ms} = 6{,}1\,\mathrm{J}$
- Bei 1000°C $W_{1000°C} = UI_{1000°C}t = 230\,\mathrm{V} \times 0{,}895\,\mathrm{A} \times 5\,\mathrm{ms} = 1{,}03\,\mathrm{J}$
- Bei 1500°C $W_{1500°C} = UI_{1500°C}t = 230\,\mathrm{V} \times 0{,}6\,\mathrm{A} \times 5\,\mathrm{ms} = 0{,}69\,\mathrm{J}$
- In der Summe werden also 7,82 J verbraucht. Während des Betriebs kommt die 100 W Lampe damit 78,2 ms aus.

3.5 Genauigkeit eines Thermometers

Ein Platindraht wird als Thermometer verwendet. Er ist so geformt, dass er bei 0°C einen Widerstand von 100 Ω aufweist (PT100). Die Temperaturkoeffizienten sind $\alpha = 3{,}850\times10^{-3}\,°\mathrm{C}^{-1}$ und $\beta = -5{,}775 \times 10^{-7}\,°\mathrm{C}^{-2}$.

(a) Berechnen Sie, in welchem Temperaturbereich dieser Widerstand mit linearer Näherung verwendet werden kann, wenn die Genauigkeitsanforderungen ±1 °C beträgt!
Lösung: Der Widerstand verhält sich wie: $R = R_0(1 + \alpha T + \beta T^2)$. Pro °C ändert sich

also der Widerstand durch den linearen Koeffizienten um α. Eine Fehlmessung tritt dann auf, wenn βT^2, also der zusätzliche Anteil gerade α ist, also $\beta T^2 = -\alpha \times 1\,°\mathrm{C}$ und damit $T = \pm\sqrt{\frac{-\alpha \times 1\,°\mathrm{C}}{\beta}} = \pm 81{,}6\,°\mathrm{C}$

3.6 Temperaturabhängigkeit eines Widerstandes

Der ohmsche Widerstand einer Spule aus Kupfer und einer Spule aus Manganin darf sich infolge von Erwärmung nur um 0,1 % erhöhen. Berechnen Sie die Temperaturen θ_{Cumax} und θ_{Mmax}, welche die Spulen annehmen dürfen. Die Bezugstemperatur ist $\theta_0 = 20°\mathrm{C}$. Die Temperaturkoeffizienten des Widerstandes sind $\alpha_{Cu} = 0{,}004\,\frac{1}{\mathrm{K}}$, $\alpha_M = 0{,}00001\,\frac{1}{\mathrm{K}}$.
Lösung: Die maximalen Temperaturen ergeben sich aus $tol = \alpha(\theta_1 - \theta_0) \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_0 + tol/\alpha$ also dann $\theta_{Cumax} = 20{,}25\,°\mathrm{C}$, $\theta_{Mmax} = 120\,°\mathrm{C}$.

3.7 Temperaturabhängigkeit in Messinstrumenten

Die Temperaturabhängigkeit metallischer Leiter kann bei Messinstrumenten zu Anzeigefehlern führen. Bei Feinmessgeräten wird deshalb vor dem Drehspulwiderstand aus Kupfer R_{Cu} ein Vorwiderstand aus Manganin R_M geschaltet, der einen viel kleineren Temperaturkoeffizienten hat: $\alpha_{M20} = 10^{-5}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$, $\alpha_{Cu20} = 3{,}92 \times 10^{-3}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$.

(a) Um wie viel Prozent erhöht sich der Drehspulwiderstand R_{Cu}, wenn sich die Umgebungstemperatur von 20°C auf 30°C erhöht?
Lösung: Erhöht sich um 3,92 %.

(b) Leiten Sie allgemein den Temperaturkoeffizienten α für den Gesamtwiderstand der Reihenschaltung $R = R_{Cu} + R_M$ her, wenn die Bezugsgrößen R_{Cu20}, R_{M20}, α_{Cu20}, α_{M20} gegeben sind.
Lösung: Es folgt

$$\begin{aligned}
R_1 &= R_0\,(1 + \alpha(\theta_1 - \theta_0)) = R_{Cu} + R_M \\
&\Rightarrow R_{Cu20}\,(1 + \alpha_{Cu}(\theta - \theta_0)) + R_{M20}\,(1 + \alpha_M(\theta - \theta_0)) \\
&= R_{Cu20} + R_{M20} + (R_{Cu20}\alpha_{Cu} + R_{M20}\alpha_M)(\theta - \theta_0) \Rightarrow \\
\alpha &= \frac{R_{Cu20}\alpha_{Cu} + R_{M20}\alpha_M}{R_{Cu20} + R_{M20}}
\end{aligned}$$

(c) Berechnen Sie den Temperaturkoeffizienten α für $R_{Cu20} = 20\,\Omega$ und $R_{M20} = 80\,\Omega$!
Lösung: Einsetzen in o.g. Gleichung ergibt $\alpha = 792\,\frac{\mathrm{ppm}}{\mathrm{K}}$

(d) Um wie viel Prozent erhöht sich der Gesamtwiderstand R, wenn sich die Umgebungstemperatur von 20°C auf 30°C erhöht?
Lösung: Das sind dann bei 10 K Temperatursteigerung 0,792 %

3.8 Erwärmung einer Leitung

(Optional, erfordert Kenntnisse über Wärmeenergie) In einem Kupferdraht mit $A = 1\,\mathrm{mm}^2$ Querschnitt fließt für die Dauer von $t = 1\,\mathrm{s}$ der Strom $I = 50\,\mathrm{A}$. Die Leitfähigkeit des Materials beträgt $\kappa = 57 \times 10^6\,\frac{1}{\Omega\mathrm{m}}$, seine spezifische Wärme ist $c = 390\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$ und die Dichte ist $\rho =$

$8{,}9 \times 10^3 \, \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Um wie viel Grad erhöht sich die Temperatur des Kupferdrahtes?
Lösung: Ein Abschnitt der Länge l des Drahtes hat folgende Eigenschaften:

- Gewicht: $m = \rho A l = 8{,}9 \times 10^{-3} l \mathrm{kg/m}$
- Widerstand: $R = l/(A\kappa) = 0{,}0175 l \Omega/\mathrm{m}$
- Spannungsabfall: $U = RI = 0{,}877 l \, \mathrm{V/m}$
- Energieumsatz: $W = UIt = 43{,}9 \, \mathrm{J/m} l$
- Temperaturerhöhung folgt dann aus $W_Q = cm\theta = W \Leftrightarrow \theta = W/(cm) = 12{,}64 \, \mathrm{K}$

Allgemein ergibt sich

$$W = RI^2 t = \frac{l}{A\kappa} I^2 t = cm\theta = c\rho A l \theta$$
$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\frac{l}{A\kappa} I^2 t}{c\rho A l} = \frac{I^2 t}{\kappa c \rho A^2}$$

3.9 Zuleitung

Längs einer 200 m langen zweiadrigen Kupferleitung als Verbindung zwischen Generator und Verbraucher soll der maximale Spannungsabfall 9 V betragen. Der spezifische Widerstand von Kupfer beträgt $\rho = 0{,}0175 \, \mu\Omega\mathrm{m}$

(a) Welche Stromdichte herrscht dann in der Leitung?
Lösung: Insgesamt ist die gesamte Länge von $l = 400 \, \mathrm{m}$ zu betrachten. Der Gesamtwiderstand der Leitung ist also $R = \rho l/A$ und der Spannungsabfall ist dann $U = RI = \rho l I/A \Leftrightarrow J = I/A = U/(\rho l) = 1{,}28 \, \mathrm{A/mm^2}$

(b) Welcher Leistungsverlust P tritt auf der Leitung auf, wenn man den Drahtdurchmesser 1 mm wählt und die Leitung exakt an der oben beschrieben Grenze betreibt?
Lösung: Bei 1 mm Durchmesser ist die Querschnittsfläche $A = 0{,}785 \, \mathrm{mm^2}$ und damit fließt ein Strom von $I = 1{,}005 \, \mathrm{A}$ und der Abfall ist $U = 9 \, \mathrm{V}$. Damit ist der Leistungsverlust $P = UI = 9 \, \mathrm{W}$.

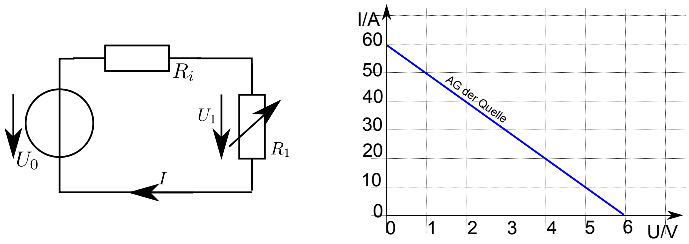
(c) Wie müsste man den Drahtdurchmesser ändern, wenn bei gleichem Strom die Verlustleistung nur halb so groß wie unter (b) sein soll?
Lösung: Wenn die Verlustleistung sich halbieren soll, so muss sich auch der Widerstand halbieren. Widerstand halbieren heißt Querschnitt verdoppeln und damit eben den Durchmesser um den Faktor $\sqrt{2}$ erhöhen.

3.10 Spannungsquelle

Entnimmt man einer realen Spannungsquelle den Strom $I_1 = 10 \, \mathrm{A}$, so sinkt ihre Klemmenspannung gegenüber dem unbelasteten Zustand von $U_0 = 6 \, \mathrm{V}$ auf $U_1 = 5 \, \mathrm{V}$.

(a) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild der oben beschriebenen Anordnung!

(b) Wie groß ist die Spannung U in Abhängigkeit vom entnommenen Strom I, wenn der Innenwiderstand der Spannungsquelle als konstant angenommen werden kann?
Lösung: Der Innenwiderstand ist offensichtlich $R_i = 1/10\,\Omega$ Die Lösung folgt im Bild:



Die Arbeitsgerade ist

$$U = 6\,\mathrm{V} - \frac{1}{10}\,\Omega I$$

(c) Welche Leistung wird unter der oben beschriebenen Bedingung (also $I = 10\,\mathrm{A}$) in dem Lastwiderstand R_1 umgesetzt? Wie groß ist R_1?
Lösung: Die Leistung ist natürlich $P = UI = 5 \times 10\,\mathrm{W} = 50\,\mathrm{W}$, der Widerstand ist $R = U/I = 0{,}5\,\Omega$.

(d) Durch Zuschalten weiterer Lasten ändert sich der Lastwiderstand und zwar so, dass er bei Nominalspannung ($U_{nom} = 5\,\mathrm{V}$) eine Leistung von $P = 200\,\mathrm{W}$ umsetzen würde. Wie groß ist der Widerstand nun und welche Leistung wird wirklich bei Betrieb mit unserer Spannungsquelle umgesetzt?
Lösung: Der Widerstand unter Nominalbedingungen ist $R = U^2/P = 25/200\,\mathrm{W} = 0{,}125\,\Omega$. Wird dieser Widerstand nun an die Spannungsquelle angeschlossen so durchfließt ihn ein Strom von $I = U_0/(R_i + R_1) = 6\,\mathrm{V}/((0{,}1 + 0{,}125)\,\Omega) = 26\frac{2}{3}\,\mathrm{A}$. Und damit ist die umgesetzte Leistung $P = I^2 \times R = 711\frac{1}{9} \times \frac{1}{8}\,\mathrm{W} = 88\frac{8}{9}\,\mathrm{W}$. Das ist natürlich ein Drama, denn die Quelle kann bei weitem nicht genug Leistung bereit stellen.