

Grundlagen der Elektrotechnik I

Duale Hochschule Karlsruhe

Dozent: Prof. Dr.-Ing. Gerald Oberschmidt

4 Standardschaltungen mit Widerständen

4.1 Serienschaltung von zwei Widerständen

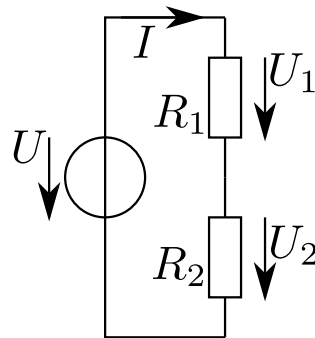


Abbildung 1: Serienschaltung von zwei Widerständen

- (a) Die Widerstände betragen $R_1 = 1000 \Omega$ $R_2 = 2000 \Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10V$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!

Lösung: Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis des Spannungsteilers:

$$R = R_1 + R_2 = 3,0000 \text{ k}\Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + R_2} = 3,3333 \text{ mA}$$

$$U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 3,3333 \text{ V}$$

$$U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 6,6667 \text{ V}$$

- (b) Die Widerstände betragen $R_1 = 90 \Omega$ $R_2 = 10 \Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10V$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!

Lösung: Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis des Spannungsteilers:

$$R = R_1 + R_2 = 100 \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + R_2} = 100 \text{ mA}$$

$$U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 9 \text{ V}$$

$$U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 1 \text{ V}$$

- (c) Bestimmen Sie die Spannungen und den Strom sowie den Gesamtwiderstand allgemein!

Lösung: Das ist natürlich ein einfacher Spannungsteiler mit, so dass sich ergibt

$$\begin{aligned}
 R &= R_1 + R_2 \\
 I &= \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + R_2} \\
 U_1 &= U \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\
 U_2 &= U \frac{R_2}{R_1 + R_2}
 \end{aligned}$$

4.2 Parallelschaltung von zwei Widerständen

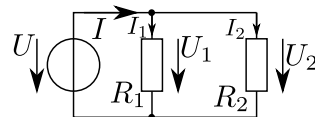


Abbildung 2: Parallelschaltung von zwei Widerständen

- (a) Die Widerstände betragen $R_1 = 1000 \Omega$ $R_2 = 2000 \Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10V$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!

Lösung: Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis des Stromteilers:

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 666,67 \Omega \\
 I &= \frac{U}{R} = U \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 15 \text{ mA} \\
 U_1 &= U_2 = U = 10 \text{ V} \\
 I_1 &= \frac{U}{R_1} = 10 \text{ mA} \\
 I_2 &= \frac{U}{R_2} = 5 \text{ mA}
 \end{aligned}$$

- (b) Die Widerstände betragen $R_1 = 90 \Omega$ $R_2 = 10 \Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10V$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!

Lösung: Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis des Strom-

teilers:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 9 \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = U \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1,1111 \text{ A}$$

$$U_1 = U_2 = U = 10 \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = 111,11 \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = 1 \text{ A}$$

- (c) Bestimmen Sie die Spannungen und den Strom sowie den Gesamtwiderstand allgemein!

Lösung: Das ist natürlich ein einfacher Stromteiler mit, so dass sich ergibt

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I = \frac{U}{R} = U \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$U_1 = U_2 = U$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2}$$

4.3 Serienschaltung von drei Widerständen

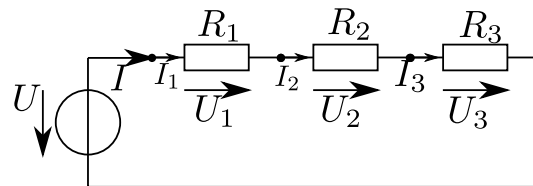


Abbildung 3: Serienschaltung von drei Widerständen

- (a) Die Widerstände betragen $R_1 = 1000 \Omega$, $R_2 = 2000 \Omega$, $R_3 = 3000 \Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10 \text{ V}$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!

Lösung: Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis des Spannungsteilers:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = 6,0000 \text{ k}\Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} = 1,6667 \text{ mA}$$

$$U_1 = IR_1 = 1,6667 \text{ V}$$

$$U_2 = IR_2 = 3,3333 \text{ V}$$

$$U_3 = IR_3 = 5 \text{ V}$$

- (b) Die Widerstände betragen $R_1 = 90 \Omega$, $R_2 = 9 \Omega$, $R_3 = 1 \Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10V$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!

Lösung: Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis des Spannungsteilers:

$$\begin{aligned}
 R &= R_1 + R_2 + R_3 = 100 \Omega \\
 I &= \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} = 100 \text{ mA} \\
 U_1 &= IR_1 = 9 \text{ V} \\
 U_2 &= IR_2 = 900 \text{ mV} \\
 U_3 &= IR_3 = 100 \text{ mV}
 \end{aligned}$$

- (c) Bestimmen Sie die Spannungen und den Strom sowie den Gesamtwiderstand allgemein!

Lösung: Das ist natürlich ein einfacher Spannungsteiler mit, so dass sich ergibt

$$\begin{aligned}
 R &= R_1 + R_2 + R_3 \\
 I &= \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} \\
 U_1 &= U \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \\
 U_2 &= U \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\
 U_3 &= U \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}
 \end{aligned}$$

4.4 Parallelschaltung von drei Widerständen

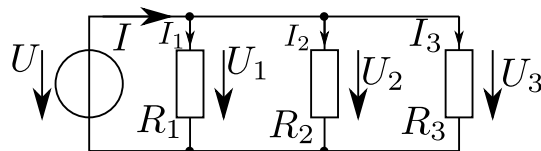


Abbildung 4: Parallelschaltung von drei Widerständen

- (a) Die Widerstände betragen $R_1 = 1000 \Omega$, $R_2 = 2000 \Omega$, $R_3 = 3000 \Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10V$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!

Lösung: Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 545,45 \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = 18,333 \text{ mA}$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = 10 \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = 5 \text{ mA}$$

$$I_3 = \frac{U}{R_3} = 3,3333 \text{ mA}$$

- (b) Die Widerstände betragen $R_1 = 11,111 \Omega$, $R_2 = 111,11 \Omega$ $R_3 = 1,0000 \text{ k}\Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10\text{V}$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!

Lösung: Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 10 \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = 1 \text{ A}$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = 900 \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = 90 \text{ mA}$$

$$I_3 = \frac{U}{R_3} = 10 \text{ mA}$$

- (c) Bestimmen Sie die Spannungen und den Strom sowie den Gesamtwiderstand allgemein!

Lösung: Hier nun die allgemeine Rechnung:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I = \frac{U}{R} = U \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3}$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{U}{R_3}$$

4.5 Parallel- und Serienschaltung von drei Widerständen

- (a) Die Widerstände betragen $R_1 = 1000 \Omega$, $R_2 = 2000 \Omega$ $R_3 = 3000 \Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10\text{V}$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!

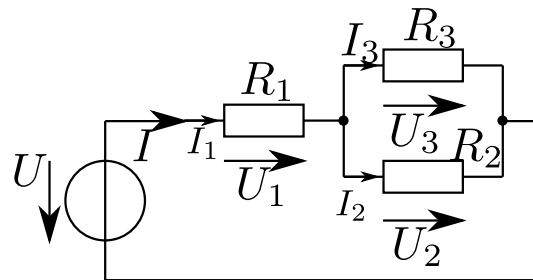


Abbildung 5: Parallel- und Serienschaltung von drei Widerständen

Lösung: Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis:

$$R = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 2,2000 \text{ k}\Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = 4,5455 \text{ mA}$$

$$U_1 = IR_1 = 4,5455 \text{ V}$$

$$U_2 = U_3 = U - U_1 = 5,4545 \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = 4,5455 \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = 2,7273 \text{ mA}$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = 1,8182 \text{ mA}$$

- (b) Die Widerstände betragen $R_1 = 90 \Omega$, $R_2 = 9 \Omega$, $R_3 = 1 \Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10 \text{ V}$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!

Lösung: Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis:

$$R = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 90,900 \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = 110,01 \text{ mA}$$

$$U_1 = IR_1 = 9,9010 \text{ V}$$

$$U_2 = U_3 = U - U_1 = 99,010 \text{ mV}$$

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = 110,01 \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = 11,001 \text{ mA}$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = 99,010 \text{ mA}$$

- (c) Bestimmen Sie die Spannungen und den Strom sowie den Gesamtwiderstand allgemein!

Lösung: Das Ergebnis der allgemeinen Rechnung

$$R = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$I = \frac{U}{R} = U \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$U_1 = I R_1 = U R_1 \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$U_2 = U_3 = U - U_1 = U \left(1 - \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \right) = U \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = U \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = U \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = U \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

4.6 Parallel- und Serienschaltung von drei Widerständen, zweite Variante

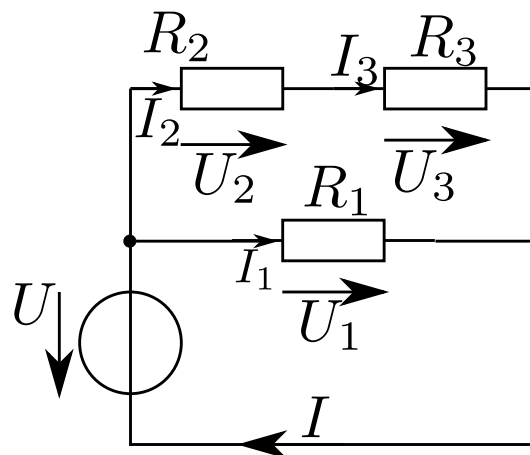


Abbildung 6: Parallel- und Serienschaltung von drei Widerständen

- (a) Die Widerstände betragen $R_1 = 1000 \Omega$, $R_2 = 2000 \Omega$, $R_3 = 3000 \Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10V$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!

Lösung: Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2+R_3}} = 833,33 \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = 12 \text{ mA}$$

$$U_1 = U = 10 \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = 10 \text{ mA}$$

$$I_2 = I_3 = \frac{U}{R_2 + R_3} = 2 \text{ mA}$$

$$U_2 = I_2 R_2 = 4 \text{ V}$$

$$U_3 = I_2 R_3 = 6 \text{ V}$$

- (b) Die Widerstände betragen $R_1 = 90 \Omega$, $R_2 = 9 \Omega$, $R_3 = 1 \Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10 \text{ V}$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!

Lösung: Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2+R_3}} = 9 \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = 1,1111 \text{ A}$$

$$U_1 = U = 10 \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = 111,11 \text{ mA}$$

$$I_2 = I_3 = \frac{U}{R_2 + R_3} = 1 \text{ A}$$

$$U_2 = I_2 R_2 = 9 \text{ V}$$

$$U_3 = I_2 R_3 = 1 \text{ V}$$

- (c) Bestimmen Sie die Spannungen und den Strom sowie den Gesamtwiderstand allgemein!

Lösung: Das Ergebnis der allgemeinen Rechnung

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2+R_3}} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$I = \frac{U}{R} = U \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1(R_2 + R_3)}$$

$$U_1 = U$$

$$I_2 = I_3 = \frac{U}{R_2 + R_3}$$

$$U_2 = U \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$U_3 = U \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

4.7 Praktische Anwendung: Belasteter Spannungs- und Stromteiler

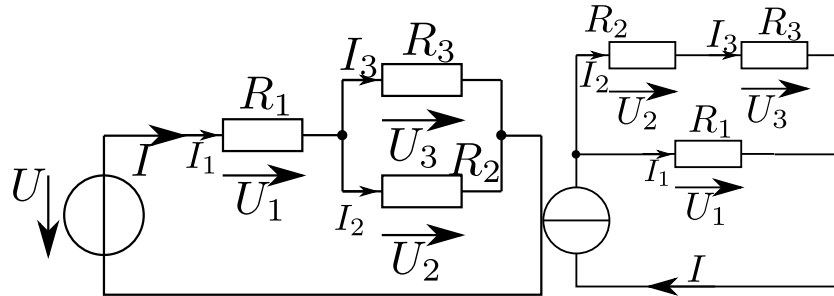


Abbildung 7: Belasteter (a) Spannungs- und (b) Stromteiler wobei jeweils R_1, R_2 den einfachen Teiler darstellen und R_3 ein zusätzlicher Lastwiderstand ist.

- (a) Berechnen Sie im Spannungsteiler die Veränderung des Teilungsverhältnisses in Abhängigkeit von der Last, arbeiten Sie im Ergebnis die Widerstandsverhältnisse R_1/R_2 und R_2/R_3 explizit heraus!

Lösung: Zunächst liefert der einfache Spannungsteiler das Verhältnis

$$U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} = U \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}$$

der dritte Widerstand führt dazu, dass R_2 ersetzt werden muss durch

$$R_2 \rightarrow \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = R_2 \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_3}}$$

Was dann zu dem Endergebnis

$$U_2 = U \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)}$$

- (b) Berechnen Sie im Stromteiler die Veränderung des Teilungsverhältnisses in Abhängigkeit von der Last, arbeiten Sie im Ergebnis die Widerstandsverhältnisse R_1/R_2 und R_2/R_3 explizit heraus!

Lösung: Zunächst liefert der einfache Stromteiler das Verhältnis

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} = I \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}}$$

der dritte Widerstand führt dazu, dass R_2 ersetzt werden muss durch

$$R_2 \rightarrow R_2 + R_3 = R_2 \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)$$

Was dann zu dem Endergebnis

$$I_2 = I \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)}$$

- (c) Berechnen Sie bei gleichen Widerständen R_1 und R_2 wie sich Strom und Spannung verhalten, wenn R_2/R_3 die Werte 0,01; 0,1; 0,5; 1; 2; 10; 100 annimmt!

Lösung:

$\frac{R_2}{R_3}$	$\frac{R_3}{R_2}$	$\frac{U_2}{U}$	$\frac{I_2}{I}$
10×10^{-3}	100	$497,51 \times 10^{-3}$	$9,8039 \times 10^{-3}$
100×10^{-3}	10	$476,19 \times 10^{-3}$	$83,333 \times 10^{-3}$
500×10^{-3}	2	400×10^{-3}	250×10^{-3}
1	1	$333,33 \times 10^{-3}$	$333,33 \times 10^{-3}$
2	500×10^{-3}	250×10^{-3}	400×10^{-3}
10	100×10^{-3}	$83,333 \times 10^{-3}$	$476,19 \times 10^{-3}$
100	10×10^{-3}	$9,8039 \times 10^{-3}$	$497,51 \times 10^{-3}$

4.8 Parallelschaltung von N -Widerständen

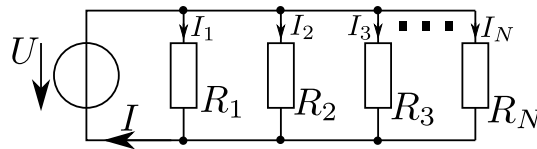


Abbildung 8: Parallelschaltung von N -Widerständen

Es sind N Widerstände parallel geschaltet. Hier kann N unter gewissen Bedingungen auch unendlich werden.

- (a) Es liegen $N = 10$ Widerstände vor, die der Verteilung $R_n = nR_0$ mit $R_0 = 1,0000 \text{ k}\Omega$ genügen. Die Spannung der Quelle ist $U = 100 \text{ V}$. Bestimmen Sie Gesamtwiderstand, und Stromstärken durch die ersten drei Widerstände und den letzten!

Lösung: Hier ist es sinnvoll mit Leitwerten zu rechnen, die dann aufsummiert werden. So ist dann

$$G = \sum_{n=1}^{n=N} \frac{1}{nR_0} = 2,9290 \text{ mS}$$

$$R = \frac{1}{G} = 341,42 \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = 292,90 \text{ mA}$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = 100 \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = 50 \text{ mA}$$

$$I_3 = \frac{U}{R_3} = 33,333 \text{ mA}$$

$$I_{10} = \frac{U}{R_{10}} = 10 \text{ mA}$$

- (b) Es liegen $N = 5$ Widerstände vor, die der Verteilung $R_n = n^2 R_0$ mit $R_0 = 1,0000 \text{ k}\Omega$ genügen. Die Spannung der Quelle ist $U = 100 \text{ V}$. Bestimmen Sie Gesamtwiderstand, und Stromstärken durch die ersten drei Widerstände und den letzten!

Lösung: Hier ist es sinnvoll mit Leitwerten zu rechnen, die dann aufsummiert werden. So ist dann

$$G = \sum_{n=1}^{n=N} \frac{1}{n^2 R_0} = 1,4636 \text{ mS}$$

$$R = \frac{1}{G} = 683,24 \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = 146,36 \text{ mA}$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = 100 \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = 25 \text{ mA}$$

$$I_3 = \frac{U}{R_3} = 11,111 \text{ mA}$$

$$I_5 = \frac{U}{R_5} = 4 \text{ mA}$$

- (c) Es liegen $N = \infty$ Widerstände vor (also unendlich viele), die der Verteilung $R_n = n^2 R_0$ mit $R_0 = 1,0000 \text{ k}\Omega$ genügen. Die Spannung der Quelle ist $U = 100 \text{ V}$. Bestimmen Sie Gesamtwiderstand, Stromstärken durch die ersten drei Widerstände und den letzten!

Lösung: Hier muss man die Konvergenz der Reihensumme der Leitwerte bestimmen. Nur wenn die Summe konvergent ist, macht die Rechnung überhaupt einen Sinn. Das ist sie hier, eine Formelsammlung ergibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449.$$

und so ist

$$G = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2 R_0} = \frac{\pi^2}{6 R_0} = 1,6449 \text{ mS}$$

$$R = \frac{1}{G} = 607,93 \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = 164,49 \text{ mA}$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = 100 \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = 25 \text{ mA}$$

$$I_3 = \frac{U}{R_3} = 11,111 \text{ mA}$$

$$I_{\infty} = 0$$

- (d) Es liegen $N = \infty$ Widerstände vor (also unendlich viele), die der Verteilung $R_n = 2^n R_0$ mit $R_0 = 1,0000 \text{ k}\Omega$ genügen. Die Spannung der Quelle ist $U = 100 \text{ V}$. Bestimmen Sie Gesamtwiderstand, Stromstärken durch die ersten drei Widerstände und den letzten!

Lösung: Hier muss man die Konvergenz der Reihensumme der Leitwerte bestimmen. Nur wenn die Summe konvergent ist, macht die Rechnung überhaupt einen Sinn. Das ist sie hier, eine Formelsammlung ergibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

und so ist

$$G = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{2^n R_0} = \frac{1}{R_0} = 1 \text{ mS}$$

$$R = \frac{1}{G} = 1,0000 \text{ k}\Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = 100 \text{ mA}$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = 50 \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = 25 \text{ mA}$$

$$I_3 = \frac{U}{R_3} = 12,500 \text{ mA}$$

$$I_{\infty} = 0$$

4.9 Serienschaltung von N -Widerständen

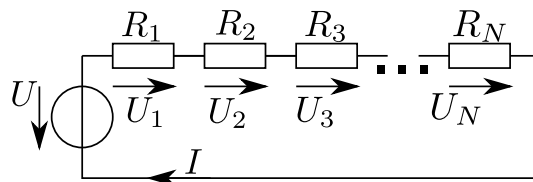


Abbildung 9: Serienschaltung von N -Widerständen

Es sind N Widerstände in Serie geschaltet. Hier kann N unter gewissen Bedingungen auch unendlich werden.

- (a) Es liegen $N = 10$ Widerstände vor, die der Verteilung $R_n = R_0/n$ mit $R_0 = 1,0000 \text{ k}\Omega$ genügen. Die Spannung der Quelle ist $U = 100 \text{ V}$. Bestimmen Sie Gesamtwiderstand, Strom und Spannungen über den ersten drei Widerstände und dem letzten!

Lösung:

$$R = \sum_{n=1}^{n=N} \frac{R_0}{n} = 2,9290 \text{ k}\Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = 34,142 \text{ mA}$$

$$U_1 = IR_1 = 34,142 \text{ V}$$

$$U_2 = IR_2 = 17,071 \text{ V}$$

$$U_3 = IR_3 = 11,381 \text{ V}$$

$$U_{10} = IR_{10} = 3,4142 \text{ V}$$

- (b) Es liegen $N = 5$ Widerstände vor, die der Verteilung $R_n = R_0/n^2$ mit $R_0 = 1,0000 \text{ k}\Omega$ genügen. Die Spannung der Quelle ist $U = 100 \text{ V}$. Bestimmen Sie Gesamtwiderstand, Strom und Spannungen über den ersten drei Widerstände und dem letzten!

Lösung:

$$R = \sum_{n=1}^{n=N} \frac{R_0}{n^2} = 1,4636 \text{ k}\Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = 68,324 \text{ mA}$$

$$U_1 = IR_1 = 68,324 \text{ V}$$

$$U_2 = IR_2 = 17,081 \text{ V}$$

$$U_3 = IR_3 = 7,5916 \text{ V}$$

$$U_5 = IR_5 = 2,7330 \text{ V}$$

- (c) Es liegen $N = \infty$ Widerstände vor (also unendlich viele), die der Verteilung $R_n = R_0/n^2$ mit $R_0 = 1,0000 \text{ k}\Omega$ genügen. Die Spannung der Quelle ist $U = 100 \text{ V}$. Bestimmen Sie Gesamtwiderstand, Strom und Spannungen über den ersten drei Widerstände und dem letzten!

Lösung: Hier muss man die Konvergenz der Reihensumme der Widerstandswerte bestimmen. Nur wenn die Summe konvergent ist, macht die Rechnung überhaupt einen Sinn. Das ist sie hier, eine Formelsammlung ergibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449.$$

und so ist

$$R = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{R_0}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} R_0 \approx 1,6449 \text{ k}\Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = 60,793 \text{ mA}$$

$$U_1 = IR_1 = 60,793 \text{ V}$$

$$U_2 = IR_2 = 15,198 \text{ V}$$

$$U_3 = IR_3 = 6,7547 \text{ V}$$

$$U_\infty = 0$$

- (d) Es liegen $N = \infty$ Widerstände vor (also unendlich viele), die der Verteilung $R_n = R_0/2^n$ mit $R_0 = 1,0000 \text{ k}\Omega$ genügen. Die Spannung der Quelle ist $U = 100 \text{ V}$. Bestimmen Sie Gesamtwiderstand, Strom und Spannungen über den ersten drei Widerstände und dem letzten!

Lösung: Hier muss man die Konvergenz der Reihensumme der Widerstandswerte bestimmen. Nur wenn die Summe konvergent ist, macht die Rechnung überhaupt einen Sinn. Das ist sie hier, eine Formelsammlung ergibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

und so ist

$$R = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{R_0}{2^n} = R_0 = 1,0000 \text{ k}\Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = 100 \text{ mA}$$

$$U_1 = IR_1 = 50 \text{ V}$$

$$U_2 = IR_2 = 25 \text{ V}$$

$$U_3 = IR_3 = 12,500 \text{ V}$$

$$U_\infty = 0$$

4.10 Verkettung von N -Serien-Parallelschaltungen: $R - 2R$ -Netzwerk

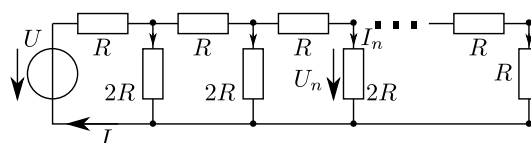


Abbildung 10: Das sogenannte $R - 2R$ -Netzwerk

N -Zellen von Widerständen mit den Werten R und dem doppelten $2R$ werden hintereinander geschaltet, nur die letzte Zelle ist anders aufgebaut. Dieses Netzwerk macht nur Sinn, es allgemein zu untersuchen. Bestimmen Sie daher allgemein alle Ströme und Spannungen durch bzw. über die masseverbundenen Widerstände.

Lösung: Zunächst wird die letzte Zelle betrachtet. Hier wird die anliegende Spannung geteilt, also ist

$$U_N = \frac{U_{N-1}}{2} \qquad I_N = \frac{U_N}{2R} = 2R.$$

Dieser Gesamtwiderstand der letzten Zelle ist parallel zum Massewiderstand der vorhergehenden, also liegt hier eine Parallelschaltung von $2R$ mit $2R$ vor, so dass effektiv die vorhergehende Zelle so aussieht wie die letzte und damit alle Zellen gleich aussehen. Nun kann man also von vorne rechnen und stellt fest, dass in jeder Zelle die Spannung halbiert wird, also

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{U}{2^n} \\ I_n &= \frac{U}{2^{n+1}R} \\ I_{zelle}n &= \frac{U}{2^n R} \\ I_{ges} &= \frac{U}{2R}. \end{aligned}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. Eine solche Schaltung kann man nun z.B. als Digital-Analog-Wandler einsetzen.

4.11 Verkettung von N -Serien-Parallelschaltungen: Allgemeiner Fall

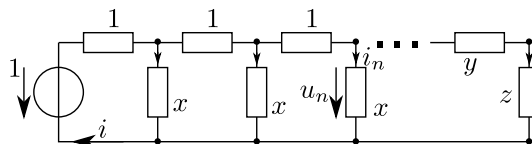


Abbildung 11: Verkettete Zellen, Darstellung ist normiert

N -Zellen von Widerständen mit den Werten 1 in längs und x zur Masse werden zur beliebigen Spannungsteilung verwendet.

- (a) Dimensionieren Sie allgemein die Parameter x, y, z so, dass von einer Stufe zur anderen die Spannung auf den Faktor c der vorherigen sinkt, also $u_n = cu_{n-1}$ gilt. Als Tipp: Starten Sie mit der Annahme einer unendlich langen Struktur (also ohne y, z).

Lösung: Wenn man von einer unendlich langen Struktur ausgeht, dann sind alle Zellen gleich und präsentieren der links liegenden einen Widerstand von r_n . Dieser liegt dann parallel zu x und beides in Serie zu 1 und für die nun weiter links liegenden Zelle erscheint wieder der gleiche Widerstand r_n . Also erhält man

$$r_n = 1 + \frac{x r_n}{x + r_n}.$$

In der Zelle liegt nun ein Spannungsteiler um den Faktor c vor:

$$c = \frac{\frac{x r_n}{x + r_n}}{1 + \frac{x r_n}{x + r_n}}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen können r_n und x bestimmt werden. Das ist aufwändig, geht aber. Man beginnt mit der ersten Gleichung

$$\begin{aligned} r_n^2 + xr_n &= x + r_n + xr_n \\ \Leftrightarrow r_n^2 &= x + r_n \\ \Leftrightarrow \left(r_n - \frac{1}{2}\right)^2 &= x + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow r_n &= \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

In der Lösung machte nur das positive Vorzeichen physikalischen Sinn. Aus der zweiten Gleichung erhält man dann (man verwendet zunächst zweimal den Zusammenhang $r_n^2 = x + r_n$ zur Vereinfachung)

$$\begin{aligned} c &= \frac{xr_n}{x + r_n + xr_n} \\ \Leftrightarrow c &= \frac{xr_n}{r_n^2 + xr_n} = \frac{x}{r_n + x} = \frac{x}{r_n^2} \\ &= \frac{x}{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}\right)^2} \\ \Leftrightarrow c \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}\right)^2 &= x \\ \Leftrightarrow c \left(\frac{1}{4} + x + \frac{1}{4} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}\right) &= x \\ \Leftrightarrow c \left(\frac{1}{2} + x + \sqrt{x + \frac{1}{4}}\right) &= x \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung/ Substitution

$$\begin{aligned} x' &= \sqrt{x + \frac{1}{4}} \\ \Leftrightarrow x'^2 &= x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ergibt sich die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned}
 c \left(\frac{1}{2} + x'^2 - \frac{1}{4} + x' \right) &= x'^2 - \frac{1}{4} \\
 \Leftrightarrow c \left(x'^2 + x' + \frac{1}{4} \right) &= x'^2 - \frac{1}{4} \\
 \Leftrightarrow x'^2(1-c) - cx' - \frac{1}{4}(1+c) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x'^2 - \frac{cx'}{1-c} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1+c}{1-c} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \left(x' - \frac{c}{2(1-c)} \right)^2 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1+c}{1-c} + \frac{c^2}{4(1-c)^2} \\
 \Leftrightarrow &= \frac{1}{4} \frac{1}{(1-c)^2} \\
 \Leftrightarrow x' &= \frac{c}{2(1-c)} + \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1-c)^2}} \\
 &= \frac{c}{2(1-c)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-c} \\
 &= \frac{1+c}{2(1-c)} \\
 \Rightarrow x &= \left(\frac{1+c}{2(1-c)} \right)^2 - \frac{1}{4} \\
 &= \frac{1+2c+c^2}{4(1-c)^2} - \frac{1-2c+c^2}{4(1-c)^2} = \frac{c}{(1-c)^2} \\
 \Rightarrow r_n &= \frac{1}{2} + \frac{1+c}{2(1-c)} = \frac{1}{1-c}.
 \end{aligned}$$

Nun bleibt noch die letzte Zelle aus y, z zu bestimmen. Hier muss sein

$$\begin{aligned}
 r_n &= y + z \\
 c &= \frac{z}{r_n} \\
 \rightarrow z &= cr_n = \frac{c}{1-c} \\
 y &= r_n - z = 1
 \end{aligned}$$

Das löst das Problem komplett.

(b) Verifizieren Sie die Lösung mit den Anforderungen des $R - 2R$ -Netzwerkes!

Lösung: Hier ist $c = 500 \times 10^{-3}$ und damit

$$\begin{aligned}
 x &= 2 \\
 r_n &= 2 \\
 y &= 1 \\
 y &= 1
 \end{aligned}$$

- (c) Modifizieren Sie die Aufgabe und Lösung so, dass eine Spannungsquelle mit Innenwiderstand eingesetzt werden kann. Die erste „1“ ist dann der Innenwiderstand und der Rest der Schaltung mit dem ersten „x“ soll den Wert des Innenwiderstandes entsprechen. .

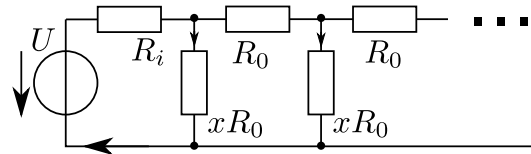


Abbildung 12: Modifikation für eine Quelle mit Innenwiderstand

Lösung: Hier soll gelten, dass

$$\frac{xR_0 r_n R_0}{xR_0 + r_n R_0} = R_i = \frac{xr_n R_0}{x + r_n}$$

r_n, x können eindeutig aus c bestimmt werden, so dass die zweite Gleichung nach R_0 aufgelöst werden kann.

$$R_i = \frac{xr_n R_0}{x + r_n}$$

$$\Leftrightarrow R_0 = R_i \frac{x + r_n}{xr_n}$$

- (d) Erstellen Sie eine Tabelle für
 $c = \{10 \times 10^{-3}; 100 \times 10^{-3}; 333,33 \times 10^{-3}; 500 \times 10^{-3}; 666,70 \times 10^{-3}; 900 \times 10^{-3}; 990 \times 10^{-3}\}$
 und
 $R_i = 50 \Omega!$

Lösung: Die passenden Formeln sind alle gegeben, man hat dann

c	x	r_n	R_0	xR_0	z	zR_0
10×10^{-3}	$10,2 \times 10^{-3}$	1,01	$4,95 \times 10^3$	50,5	$10,1 \times 10^{-3}$	50
100×10^{-3}	123×10^{-3}	1,11	450	55,6	111×10^{-3}	50
333×10^{-3}	750×10^{-3}	1,50	100	75,0	500×10^{-3}	50
500×10^{-3}	2	2	50	100	1	50
667×10^{-3}	6,00	3,00	25,0	150	2,00	50
900×10^{-3}	90	10	5,56	500	9	50
990×10^{-3}	$9,90 \times 10^3$	100	505×10^{-3}	$5,00 \times 10^3$	99	50