

Grundlagen der Elektrotechnik I

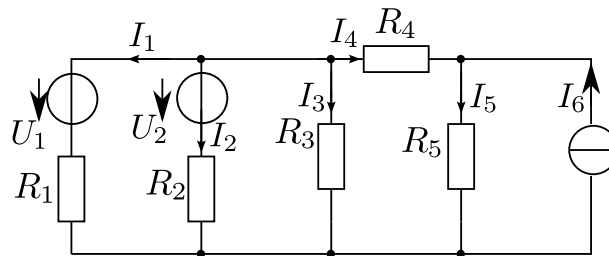
Duale Hochschule Karlsruhe

Dozent: Prof. Dr.-Ing. Gerald Oberschmidt

7 Knotenpotenzialverfahren

7.1 Knotenpotenzialverfahren

Die im Bild dargestellte Schaltung enthält zwei Spannungsquellen mit den Spannungen $U_1 = 40\text{ V}$ und $U_2 = 60\text{ V}$ sowie eine Stromquelle, die den Strom $I_6 = 1,2\text{ A}$ liefert. Die Widerstände haben die Werte $R_1 = R_3 = R_5 = 50\ \Omega$ und $R_2 = R_4 = 40\ \Omega$. Bestimmen Sie alle Zweigströme mit Hilfe des Knotenspannungsverfahrens.



...

Lösung: Die Schaltung hat drei Knoten, ich wähle 1: links von R_4 , 2: rechts von R_4 und 0 die untere Verbindung. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_3 + G_4 & -G_4 \\ -G_4 & G_4 + G_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 G_1 + U_2 G_2 \\ I_6 \end{pmatrix}$$

und mit den Werten $G_1 = G_2 = 25\text{ mS}$ und $G_3 = G_4 = G_5 = 20\text{ mS}$ sowie $U_1 G_1 = 0,8\text{ A}$, $U_2 G_2 = 1,5\text{ A}$ und natürlich $I_6 = 1,2\text{ A}$ wird die Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 90 & -25 \\ -25 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2300 \\ 1200 \end{pmatrix} \text{ V}$$

und dann der Lösungsweg über

$$\begin{pmatrix} 1 & -0,2778 \\ -1 & 1,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25,56 \\ 48 \end{pmatrix} \text{ V}$$

zu der letzten Zeile

$$1,522 \times U_{20} = 73,56\text{ V}$$

und schließlich

$$U_{20} = 48,32\text{ V}$$

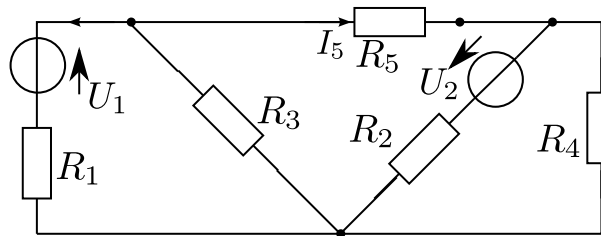
$$U_{10} = 38,98\text{ V.}$$

Die einzelnen Ströme sind dann

$$\begin{aligned}
 I_4 &= -G_4(U_{20} - U_{10}) = -233,5 \text{ mA}, & I_3 &= G_3 U_{10} = 779,6 \text{ mA}, \\
 I_5 &= G_5 U_{20} = 966,4 \text{ mA}, & I_1 &= G_1(U_{10} - U_1) = -20,4 \text{ mA}, \\
 I_2 &= G_2(U_{10} - U_2) = -525 \text{ mA}.
 \end{aligned}$$

7.2 Knotenpotenzialverfahren

Berechnen Sie mit Hilfe der Knotenspannungsanalyse den Strom I_5 durch R_5 der Schaltung! Sie können das Ergebnis vereinfachend mit Hilfe der Leitwerte $G_i = 1/R_i$ angeben.



...

Lösung: mit der Abkürzung $G_i = 1/R_i$ ist das Gleichungssystem für die Knotenwahl 1: links von R_5 , 0: rechts von R_5 und 2 unten

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_3 + G_5 & -G_1 - G_3 \\ -G_1 - G_3 & G_1 + G_2 + G_3 + G_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_1 G_1 \\ U_1 G_1 - U_2 G_2 \end{pmatrix}$$

Die Knoten wurden so gewählt, damit eine Spannung dieses Verfahrens direkt über dem interessierenden Zweig abfällt.

Das Gleichungssystem muss nun für U_{10} und nur dafür gelöst werden. Dazu verwende ich nun die Cramer'sche Regel. Die Determinante der kompletten Matrix ist:

$$D_A = (G_1 + G_3 + G_5)(G_1 + G_2 + G_3 + G_4) - (G_1 + G_3)^2$$

und die Determinante, in der die erste Spalte mit der rechten Seite ersetzt wurde ist

$$D_1 = -U_1 G_1 (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) + (U_1 G_1 - U_2 G_2)(G_1 + G_3).$$

Das Ergebnis ist dann der Quotient aus beidem, also

$$U_{10} = \frac{D_1}{D_A} = \frac{-U_1 G_1 (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) + (U_1 G_1 - U_2 G_2)(G_1 + G_3)}{(G_1 + G_3 + G_5)(G_1 + G_2 + G_3 + G_4) - (G_1 + G_3)^2}$$

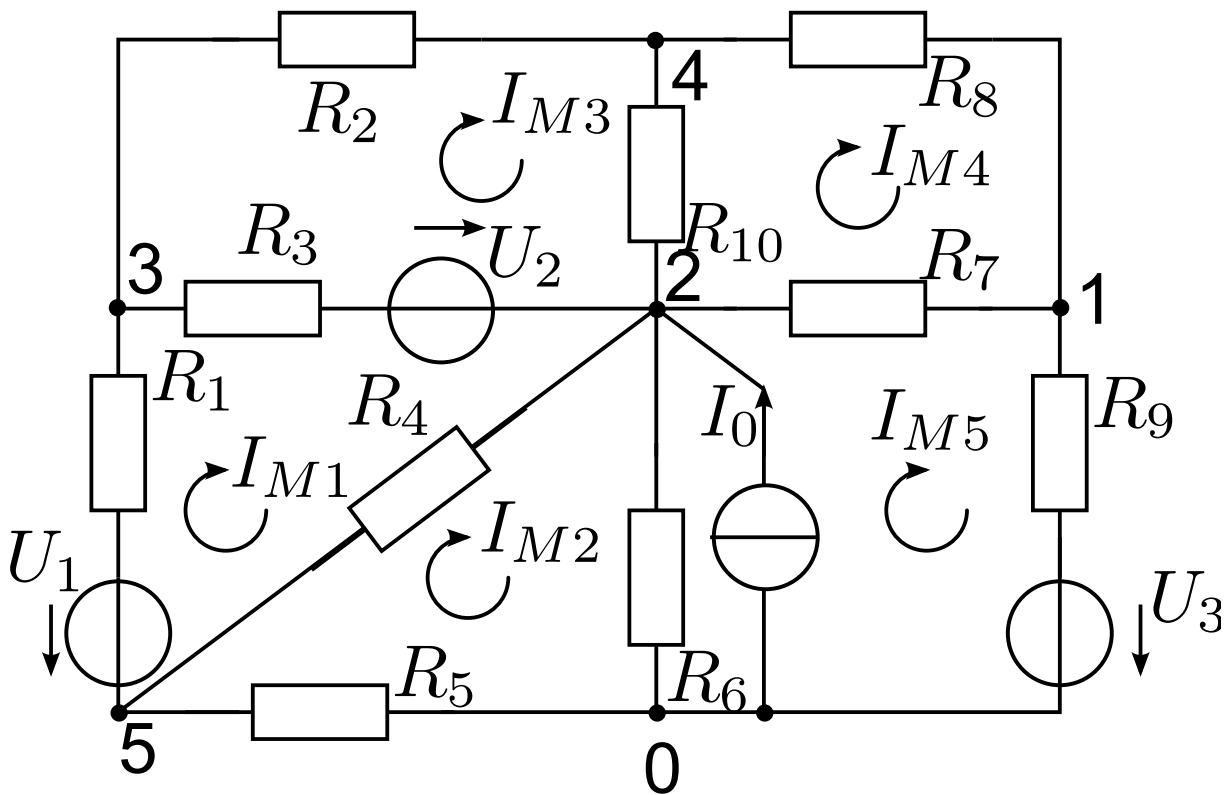
und mit

$$I_5 = U_{10} G_5 = G_5 \times \frac{-U_1 G_1 (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) + (U_1 G_1 - U_2 G_2)(G_1 + G_3)}{(G_1 + G_3 + G_5)(G_1 + G_2 + G_3 + G_4) - (G_1 + G_3)^2}.$$

7.3 Vergleich der Verfahren

Bestimmen Sie für die dargestellte Schaltung das Gleichungssystem in Matrixschreibweise. Verwenden Sie hierfür

- (a) das Zweigstromanalyseverfahren,
- (b) das Maschenstromverfahren (nutzen Sie die eingezeichneten Maschenströme)
- (c) das Knotenspannungsverfahren für die angegebenen Knoten!



...
Lösung: Nach dem Zweigstromverfahren ergibt sich

$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
 -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 R_1 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & R_4 & R_5 & -R_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & R_2 & -R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{10} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_7 & R_8 & 0 & -R_{10} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 & -R_7 & 0 & R_9 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 I_1 \\
 I_2 \\
 I_3 \\
 I_4 \\
 I_5 \\
 I_6 \\
 I_7 \\
 I_8 \\
 I_9 \\
 I_{10}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 -I_0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 U_1 - U_2 \\
 0 \\
 U_2 \\
 0 \\
 -U_3
 \end{pmatrix}$$

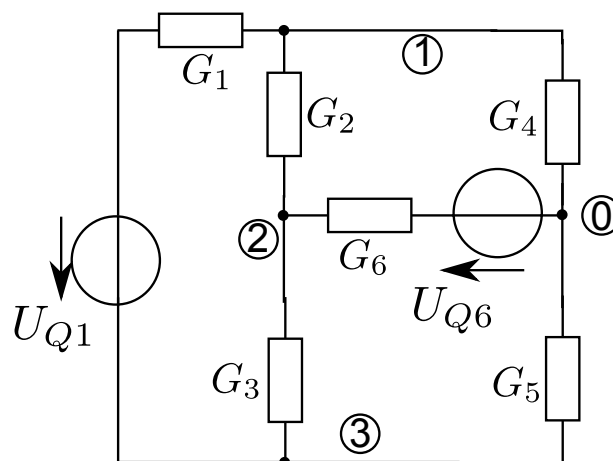
Im Maschenstromverfahren hat man dann

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & -R_4 & -R_3 & 0 & 0 \\ -R_4 & R_4 + R_5 + R_6 & 0 & 0 & -R_6 \\ -R_3 & 0 & R_2 + R_3 + R_{10} & -R_{10} & 0 \\ 0 & 0 & -R_{10} & R_7 + R_8 + R_{10} & -R_7 \\ 0 & -R_6 & 0 & -R_7 & R_6 + R_7 + R_9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \\ I_{M4} \\ I_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_2 + U_1 \\ -I_0 R_6 \\ U_2 \\ 0 \\ I_0 R_6 - U_3 \end{pmatrix}$$

Und schließlich noch in der Knotenspannungsanalyse

$$\begin{pmatrix} G_7 + G_8 + G_9 & -G_7 & 0 & -G_8 & 0 \\ -G_7 & G_3 + G_4 + G_6 + G_7 + G_{10} & -G_3 & -G_{10} & -G_4 \\ 0 & -G_3 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 & -G_1 \\ -G_8 & -G_{10} & -G_2 & G_2 + G_8 + G_{10} & 0 \\ 0 & -G_4 & -G_1 & 0 & G_1 + G_4 + G_5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \\ U_{40} \\ U_{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_3 G_9 \\ I_0 - U_2 G_3 \\ U_2 G_3 + U_1 G_1 \\ 0 \\ -U_1 G_1 \end{pmatrix}$$

7.4 Kirchhoff'sche Regeln (14 Punkte)



- (a) Geben Sie für die o.g. Schaltung das Gleichungssystem an, das bei der Knotenspannungsanalyse entsteht. Vor Aufstellung formen Sie die Quellen ggf. in die jeweils geeignetste Form (Strom- oder Spannungsquelle) um!

Lösung: Die Spannungsquellen müssen in Stromquellen umgewandelt werden, so dass

man

$$\begin{aligned} I_{Q1} &= G_1 \times U_{Q1} \\ I_{Q6} &= G_6 \times U_{Q6} \end{aligned}$$

erhält.

Es ergibt sich auf einfachem Wege das folgende GLS:

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -G_2 & -G_1 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_6 & -G_3 \\ -G_1 & -G_3 & G_1 + G_3 + G_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{Q1}G_1 \\ -U_{Q6}G_6 \\ -U_{Q1}G_1 \end{pmatrix}$$

Bewertung: (5) Punkte insgesamt, Teilpunkte werden für einzelne richtige Matrix-Einträge und die Umwandlung der Spannungsquellen in Stromquellen gegeben

- (b) Für die Werte der Leitwerte und der Quellen gilt $G_2 = G_4 = 1 \text{ mS}$, $G_1 = 10 \text{ mS}$, $G_3 = G_5 = 2 \text{ mS}$, $G_6 = 10 \text{ mS}$, $U_{Q1} = 100 \text{ V}$ und $U_{Q6} = 10 \text{ V}$. Berechnen Sie alle Knotenspannungen.

Lösung: Einsetzen der Zahlenwerte in das GLS ergibt:

$$\begin{pmatrix} 12 & -1 & -10 \\ -1 & 13 & -2 \\ -10 & -2 & 14 \end{pmatrix} \text{ mS} \begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \text{ mA} \\ -100 \text{ mA} \\ -1000 \text{ mA} \end{pmatrix}$$

nun wird das Gleichungssystem gelöst und wir erhalten:

$$\begin{aligned} U_{K1} &= 54,48 \text{ V} \\ U_{K2} &= -8,70 \text{ V} \\ U_{K3} &= -33,76 \text{ V} \end{aligned}$$

Bewertung: (5) Punkte, jeweils (2) Punkte für den Weg und (3) Punkte die richtigen Knotenspannungen

- (c) Berechnen Sie alle Zweigströme als Funktion der Knotenspannungen und berechnen Sie die Zweigströme dann!

Lösung: Die Ströme ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned} I_{Z1} &= (U_{K1} - U_{K3} - U_{Q1})G_1 = 118 \text{ mA} \\ I_{Z2} &= (U_{K1} - U_{K2})G_2 = 63 \text{ mA} \\ I_{Z3} &= (U_{K3} - U_{K2})G_3 = 50 \text{ mA} \\ I_{Z4} &= U_{K1}G_4 = 54 \text{ mA} \\ I_{Z5} &= U_{K3}G_5 = 68 \text{ mA} \\ I_{Z6} &= (U_{K2} + U_{Q6})G_6 = 13 \text{ mA} \end{aligned}$$

Bewertung: (3) Punkte, je (0,5) für jeden der Zweigströme

- (d) Geben Sie den Strom durch G_6 an, wenn die Spannungsquelle mit $U_{Q6} = 0$ abgeschaltet wird!

Lösung: Das ist die abgegliche Brücke, damit ist dann natürlich $I_6 = 0$ **Bewertung:**
(1) Punkt