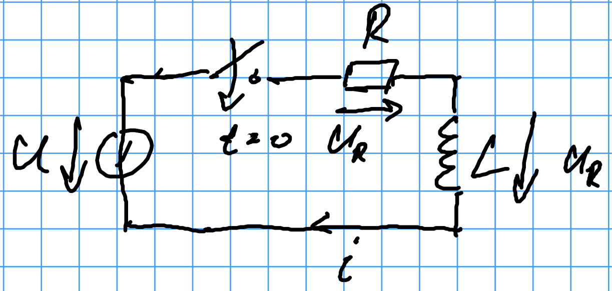
Schaltvorgänge

z.B.



Was passiert für $t>0$

$t>0$ Maschenumlauf $\qquad U = u_R + u_L$

Gesetze der Bauelemente $\qquad u_R = R\cdot i$

$$u_L = L\cdot\frac{di}{dt}$$

$$U = R\cdot i + L\cdot\frac{di}{dt}$$ Differentialgleichung Linear, 1. Ordnung

Aufteilung in homogenen Anteil (Rechte Seite = 0)

$$R\cdot i + L\cdot\frac{di}{dt} = 0$$

Lösung für den eingeschwungenen Zustand „nach langer Zeit"

⇒ Gesamtlösung ist die Überlagerung beider Anteile

Lösung des homogenen Teils

$$R\cdot i + L\cdot\frac{di}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad R\cdot i\cdot dt = -L\cdot di$$

$$\Leftrightarrow \quad R\cdot dt = -L\cdot\frac{di}{i}$$

$$\int \quad \Rightarrow \quad \int_0^t R\cdot dt' = -L\int_{I_0}^{I}\frac{di'}{i'}$$

$$R\cdot t = -L\cdot\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{R}{L}\cdot t$$

$$\underline{\underline{I = I_0\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}}}$$ I_0 Freie Variable

häufig löst man DGL durch einen Ansatz, in dem man die Lösung quasi rät.

Ansatz mit e-Funktion

$$J = J_0 \cdot e^{\lambda t} \qquad \lambda: \text{freier Parameter}$$

Einsetzen in DGL

$$R \cdot J_0 \cdot e^{\lambda t} + L \cdot \lambda \cdot J_0 \cdot e^{\lambda t} = 0 \qquad J_0 \neq 0$$

charakteristische Gleichung

$$R + L \cdot \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{R}{L}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J = J_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}}$$

Bestimmung von J_0 ? $\Rightarrow$ Wir haben noch Anfangsbedingung & Lösung für den eingeschwungenen Zustand.

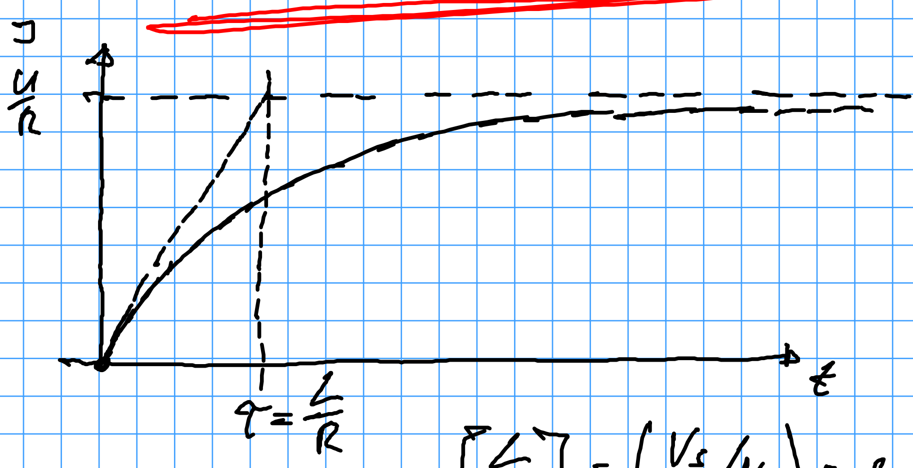
Eingeschwunge: $J_\infty = \frac{U}{R}$ (nach langer Zeit

Am Anfang $J(t) = 0$

$$J_{ges}(t) = J_\infty + J_0 e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = \frac{U}{R} + J \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$J_{ges}(0) = 0 = \frac{U}{R} + J_0 \quad \Leftrightarrow \quad J_0 = -\frac{U}{R}$$

$$\underline{J_{ges}(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-R/L \cdot t}\right)}$$



$$\left[\frac{L}{R}\right] = \left(\frac{Vs}{A} \Big/ \frac{V}{A}\right) = s \quad \text{ist eine Zeitkonstante.}$$

$\tau = \frac{L}{R}$ ist die [Lade] Zeitkonstante des LR-Kreises

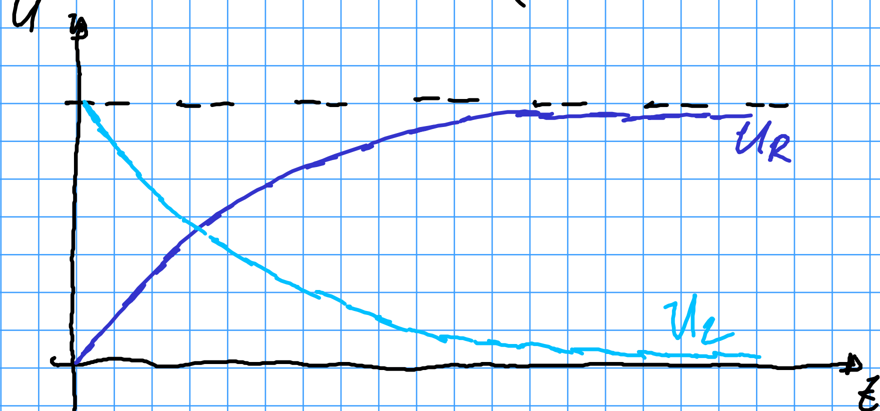
t/τ	$I/\frac{U}{R}$
0	0
1	$1-e^{-1} = 63{,}2\%$
2	$1-e^{-2} = 86{,}4\%$
3	$1-e^{-3} = 95\%$
4	$1-e^{-4} = 98{,}1\%$
5	$1-e^{-5} = 99{,}3\%$

Spannung an der Spule und am Widerstand

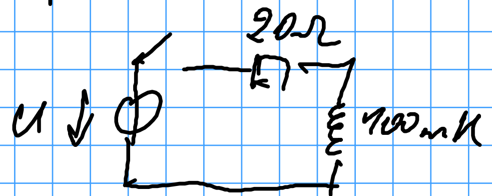
$$U_R = R\cdot I = U\cdot\left(1-e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)$$

$$U_L = U - U_R = U - U + U\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} = U e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$$

$$= L\cdot\frac{di}{dt} = L\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{U}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)\right) = L\cdot\frac{U}{R}\cdot\frac{R}{L}\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} = \underline{\underline{U\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}}}$$



16.1



$$I(t) = \frac{U}{R}\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{mit } \tau = \frac{L}{R} = \frac{0{,}1H}{20\Omega} = 5ms$$

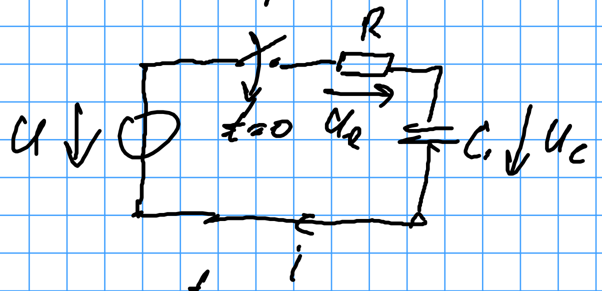
$t = ?$ $$p\cdot\frac{U}{R} = \frac{U}{R}\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad p = 99\%$$

$$\Leftrightarrow \quad p = 1-e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-\frac{t}{\tau}} = 1-p \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{t}{\tau} = \ln(1-p)$$

$$\Leftrightarrow \quad t = -\tau\cdot\ln(1-p) = \underline{\underline{23\,ms}}$$

Ohm'sch Kapazitiver Kreis



Maschengleichung:

$$U = u_R + u_C$$

$$U = R i + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i \, dt'$$

$$q = \int_0^t i \, dt \quad ; \quad \frac{dq}{dt} = i$$

$$U = R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q$$

DGL. 1. Ordng. Linear

Homogene Gleichung / Lösungsansatz

$$0 = R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$q = Q_0 \cdot e^{\alpha t} \qquad 0 = R \cdot Q_0 \cdot \alpha \cdot e^{\alpha t} + \frac{1}{C} \cdot Q_0 \cdot e^{\alpha t} \qquad Q_0 \neq 0$$

$$0 = R \cdot \alpha + \frac{1}{C}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -(R \cdot C)^{-1}$$

$$q_h = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Lösung nach langer Zeit & Anfangszustand

$$q_{ges}(0) = 0 \quad ; \quad q(\infty) = C \cdot U$$

$$q_{ges}(t) = C \cdot U + Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \Rightarrow q_{ges}(0) = 0 \qquad \Leftrightarrow Q_0 = -C \cdot U$$

$$\underline{\underline{q_{ges}(t) = C \cdot U \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}}$$

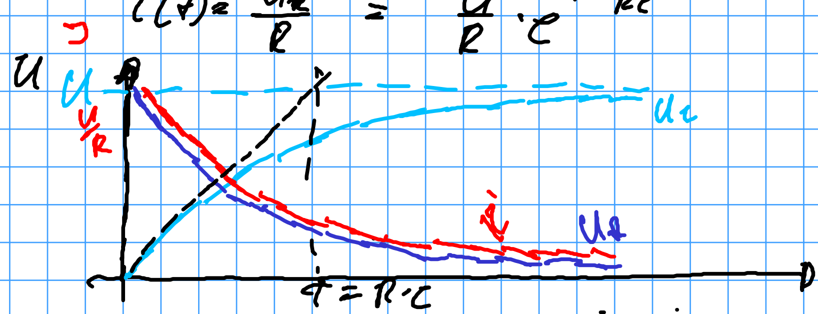
$$u_c = \frac{q_c}{C} \qquad \underline{\underline{u_c(t) = U \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}}$$

$$u_R = U - u_c(t) = U \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

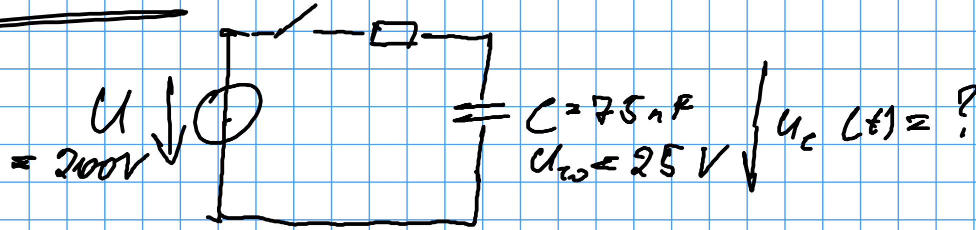
$$i(t) = \frac{u_R}{R} = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Zeitkonstante

$$\underline{\underline{\tau = R \cdot C}}$$



Aufgabe 16.2



$$u_c(t) = U_\infty - U_{ch} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$\tau = R \cdot C = 75\,nF \cdot 10\,k\Omega = 750\,\mu s$

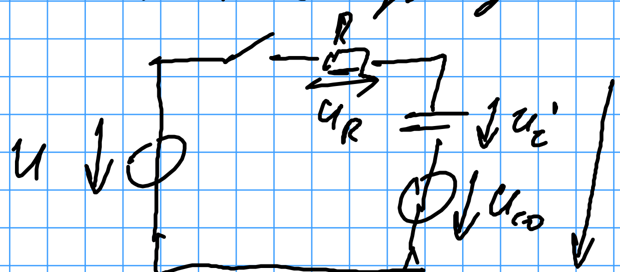
Randbedingungen: $U_c(t=\infty) = U \Rightarrow U_\infty = U = 200V$

$U_c(t=0) = U_{c0} = U_\infty - U_{ch}$

$\Leftrightarrow U_{ch} = U_\infty - U_{c0} = 200V - 25V = 175V$

$$\underline{\underline{u_c(t) = 200V - 175V \cdot e^{-\frac{t}{750\mu s}}}}$$

Mit Schaltbild für geladenen Kondensator



Lösung für u_c'

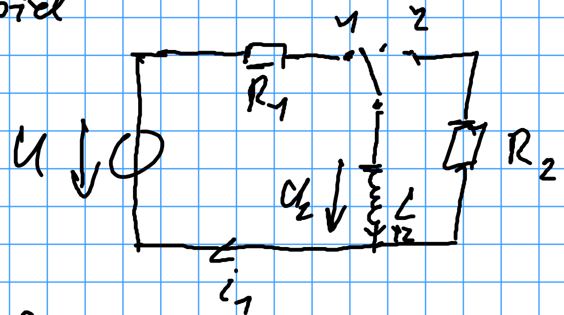
$$u_c'(t) = (U - U_{c0}) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$u_c(t) = u_c'(t) + U_{c0}$$

$$u_c(t) = U - U_{c0} - (U - U_{c0}) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + U_{c0}$$

$$\underline{\underline{= U - (U - U_{c0}) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}}$$

Beispiel

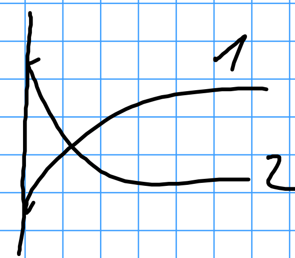


$t = 0$ Schalter in 1

$t = t_1$ Schalter in 2

Umschalter funktioniert Verzögerungsfrei

Bestimmen Sie $u_L(t)$ für $t > 0$



1) $0 < t < t_1$

$u_L(t) =$

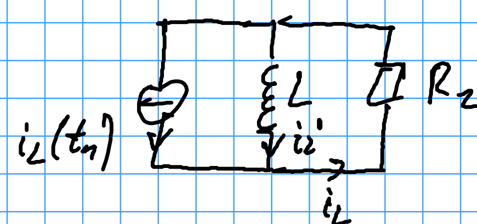
$$\underline{\underline{u_L(t) = U \cdot e^{-\frac{R_1}{L} \cdot t}}}$$

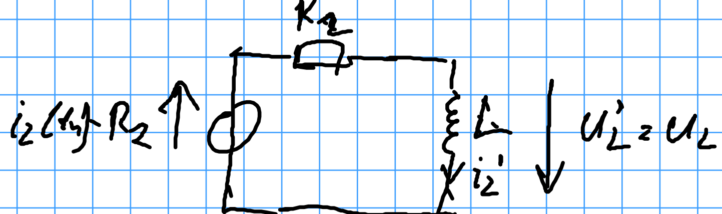
$$\underline{\underline{i_L(t) = \frac{U}{R_1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R_1}{L} \cdot t}\right)}}$$

2) mit ESB für „geladene" Spule

$t > t_1$

$$i_L(t_1) = \frac{U}{R_1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R_1}{L} \cdot t_1}\right)$$





$$u_L(t) = -i_L(t_1) \cdot R_2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R_2}{L} \cdot (t - t_1)}\right)$$

Zusammenbauen:

$t > t_1$: $$\underline{\underline{u_L(t) = -U \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R_1}{L} \cdot t_1}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{R_2}{L} \cdot (t - t_1)}\right)}}$$

$\frac{R_2}{R_1} \gg 1$ ist möglich

Wenn R_2 groß, dann ist

$$\frac{L}{R_2} \ll \frac{L}{R_1}$$

$$\tau_2 \ll \tau_1$$

Entladung schneller als Ladung.