Kapitel 3

Messgeräte im Überblick

3.1 Einführung in das Thema

- Sinn: Überblick über Funktion und Anwendung der wichtigsten (einfachen) Messgeräte
- Ziel: Interesse wecken... In diesem Sinne soll dieses Kapitel zweierlei bei Ihnen erreichen:
  - Spaß bereiten und Sie als Elektrotechniker fühlen lassen.
  - Eine schnelle Vorbereitung auf das Labor bringen.
- Sie sollen in der Lage sein
  - Einfache Messungen elektrischer Größen richtig durchzuführen
  - Geräte nach Ihrem Einsatz und Ihrer Güte beurteilen und auswählen zu können.

Aus diesem Grunde steht dieses Kapitel nicht ganz an der richtigen Stelle im Ablauf einer "normalen" Messtechnik Vorlesung.

3.2 Die zu messenden elektrischen Größen

Messen wir elektrische Größen, so geht es im Wesentlichen um

- Strom
- Spannung

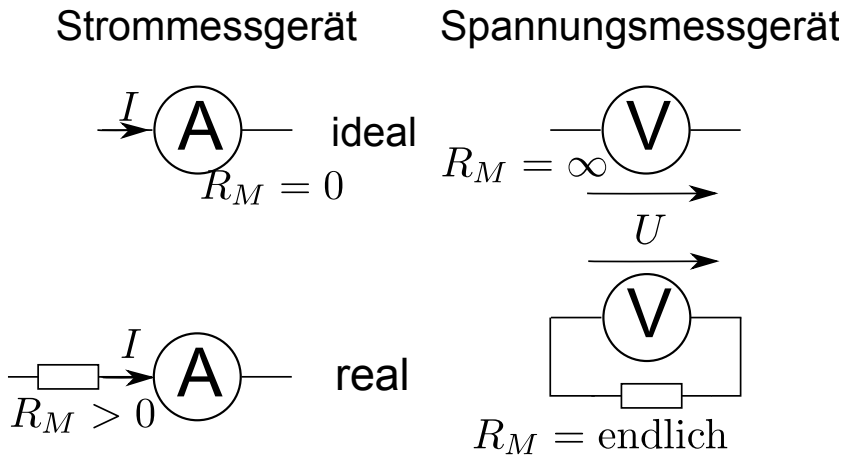


Abbildung 3.1: Strom- und Spannungsmessgeräte, ideal und real

- (Elektrische) Leistung und Energie bzw. Arbeit
- Widerstand und allgemeiner "Impedanzen"
- In zweiter Linie auch elektrische oder magnetische Felder

Zudem kann es von Interesse sein, nicht nur den statischen Wert des jeweiligen Parameters, sondern auch seinen zeitlichen Verlauf zu kennen. In einigen Fällen können die Ergebnisse vereinfacht und bewertet werden, so dass bspw. nicht die Spannung oder Strom von Interesse sind, sondern statt dessen - wie in der Digitaltechnik - die zu Eins oder Null bewerteten Signale.
In Abb. 3.1 sind die Schaltzeichen und Prinzipien des Strom- und Spannungsmessgerätes dargestellt. Zur Strommessung trennt man eine vorhandene Leitung auf und schließt die dann wieder über das Ampere-Meter. Dieses soll nun die ursprüngliche Schaltung so wenig wie möglich beeinflussen, und nur die vorbeiströmenden Ladungsträger zählen, bzw. ihre Wirkung messen. Daher muss natürlich der Innenwiderstand so gering wie möglich sein. Real ist der Widerstand R_M natürlich endlich, je nach Ausführung im $\mu\Omega$ bis wenige Ω Bereich.
Anders dagegen beim Spannungsmesser. Hier wird die potenzielle Energie (der Ladungsträger) gemessen. Und so wie ein Metermaß die Höhe eines Gebäudes nicht senken soll, so soll auch ein Spannungsmesser diese Energie nicht senken. Sein Innenwiderstand soll also möglichst groß, ideal unendlich, sein. Real ist dieses nicht immer gegeben, sondern es liegt ein Innenwiderstand im Bereich von vielen kΩ bis zu vielen MΩ vor.
Über das Ohmsche Gesetz

$$U = R \times I \tag{3.1}$$

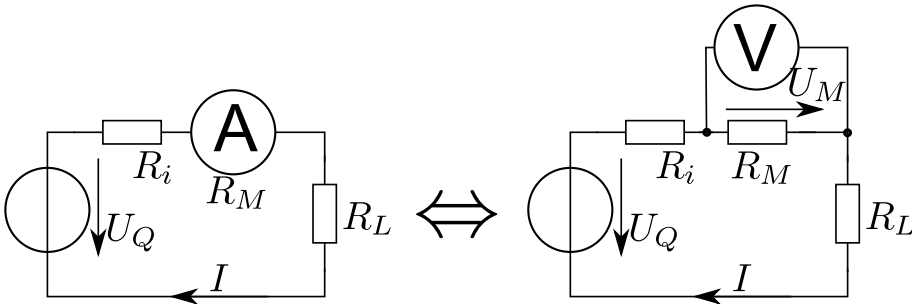


Abbildung 3.2: Messung von Strom mittels Voltmeter

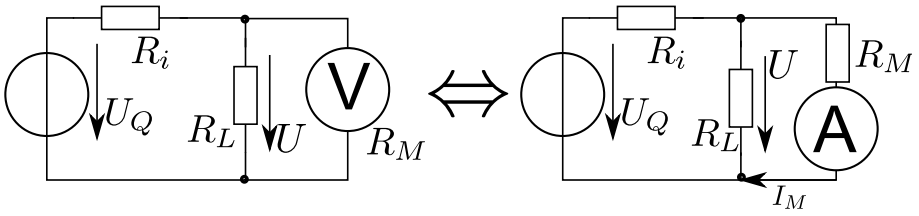


Abbildung 3.3: Messung von Spannung mittels Amperemeter

sind Strom und Spannung direkt miteinander verknüpft, so dass es im Prinzip reicht, einen Parameter, nämlich Strom *oder* Spannung, bei bekanntem Widerstand R_M messen zu können. Der andere Wert - sollte er von Interesse sein - kann rechnerisch über Gl. (3.1) bestimmt werden. Verdeutlicht ist das Verfahren in den Abb. 3.2 und 3.3. Und natürlich ist der Strom (Abb. 3.2) $I = U_M/R_M$, auch über die Messung mit einem Voltmeter zu erhalten, wenn der Spannungsabfall über einem bekannten Widerstand R_M gemessen wird. Ebenso ist (Abb. 3.3) über $U = I_M \times R_M$ mittels Ampere-Meter der Spannungsabfall U über einem Lastwiderstand zu erhalten. Hier wurde einfach der Strom I_M durch einen Messwiderstand R_M gemessen. Der Rede Sinn ist hier, dass man sich nur für die Messung der einen Größe entscheiden muss, den Rest bekommt man dazu.
Früher hat man Ströme gemessen und ausgenutzt, dass diese in einem Magnetfeld, dass sie ggf. sogar selber erzeugen, eine Kraft hervorrufen, die dann mechanisch kompensiert und angezeigt werden kann. So funktionierten die Dreheisen- und Drehspulinstrumente [1, 2, 3, 4, 5] und viele mehr. Diese Geräte kommen heute nur noch selten zum Einsatz. Man findet sie noch in den (ungenauen) Anzeigen (billiger) Spannungsversorgungen. Und natürlich hängen auch heute noch auf diesen Prinzipien basierende Messgeräte in den Kellern der Wohnhäuser und “zählen dort den Strom”.
In dieser Übersicht kommen wir gleich zum Punkt der digitalen Messgeräte.

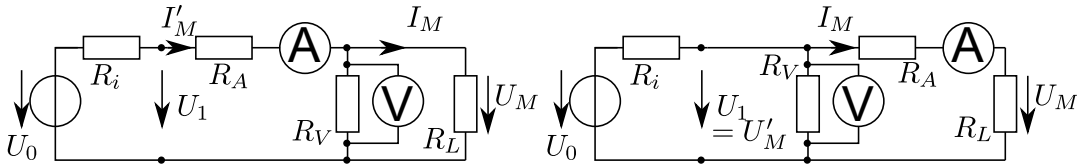


Abbildung 3.4: Spannungsrichtige (a) und stromrichtige (b) Messung von Strom und Spannung an einem Widerstand R_L

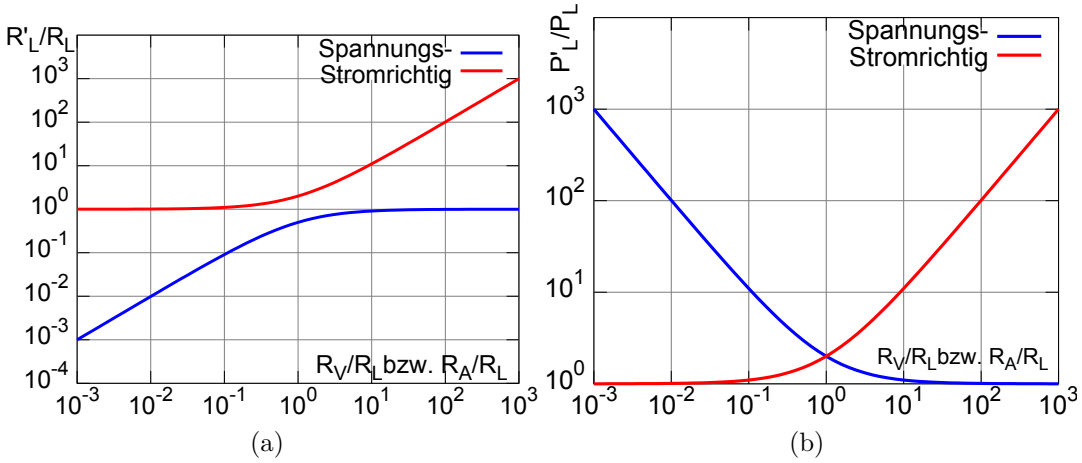


Abbildung 3.5: Gemessener Widerstand (a) und gemessene Leistung (b) relativ zum idealen Wert in Abhängigkeit vom Innenwiderstand des bestimmenden Messinstrumentes für spannungs- und stromrichtige Schaltung

3.3 Systematische Fehler bei Spannungs- und Strommessung

Oben wurde gezeigt, dass Strommessgeräte einen (möglichst geringen) Innenwiderstand und Spannungsmesser einen (möglichst hohen Innenwiderstand haben. Werden beide Geräte gleichzeitig in einer Schaltung verwendet, um z.B. Spannung- und Strom und daraus Leistung oder Widerstand zu bestimmen, so ergeben sich folgende zwei Möglichkeiten, die in Abb. 3.4 dargestellt sind.
Hier kann man entweder den Spannungsmesser (Abb. 3.4a) oder den Strommesser (Abb. 3.4b) direkt an die Last in bzw. an der die Werte interessieren, anlegen. Der Innenwiderstand der Quelle R_i ist hier unerheblich. Zwar beeinflusst er Strom- und Spannung durch bzw. an R_L, aber diese Beeinflussung wird in jedem Fall richtig gemessen. Für die spannungs-

richtige Messung wird vom Voltmeter natürlich die Spannung gemessen, die auch wirklich an R_L abfällt, wärend das Ampere-Meter

$$I'_M = \frac{U_M}{R_L} + \frac{U_M}{R_V} = U_M \frac{R_L + R_V}{R_L R_V} \tag{3.2}$$

anzeigt, was etwas zu viel ist. Der daraus (unkorrigiert) zu berechnende Widerstand bzw. die Leistung wären dann

$$R'_L = \frac{U_M}{I'_M} = \frac{R_L R_V}{R_L + R_V} = \frac{R_L}{1 + \frac{R_L}{R_V}} \tag{3.3}$$

$$P'_M = U_M I'_M = U_M^2 \frac{R_L + R_V}{R_L R_V} = \frac{U_M^2}{R_L} \times \left(1 + \frac{R_L}{R_V}\right) \tag{3.4}$$

die Werte für die Parallelschaltung von R_L und R_V.
In der Stromrichtigen Schaltung ergibt sich analog, dass I_M genau der gemessene Strom ist, der auch durch die Widerstand fließt, während hier nun

$$U'_M = I_M(R_L + R_A) \tag{3.5}$$

und damit dann

$$R''_L = \frac{U'_M}{I_M} = R_L + R_A = R_L \left(1 + \frac{R_A}{R_L}\right) \tag{3.6}$$

$$P''_M = U'_M I_M = I_M^2 \left(R_L + R_A\right) = I_M^2 R_L \left(1 + \frac{R_A}{R_L}\right), \tag{3.7}$$

was den Ergebnissen der Reihenschaltung von R_A und R_L entspricht. In beiden Fällen (Strom- oder Spannungsrichtig) wird eine zu hohe Leistung gemessen, während der Widerstand einmal zu klein (spannungsrichtig) und einmal zu groß (stromrichtig) angegeben wird. Die Ergebnisse normiert sind in Abb. 3.5 dargestellt. Fehler werden von 1 % und mehr treten in der Leistungs- bzw. Widerstandmessung auf, wenn in der spannungsrichtigen Schaltung der Innenwiderstand des Voltmeters nur 99 mal so groß wie der zu messende Widerstand ist, noch kleiner. In der stromrichtigen Schaltung liegt der 1 % Fehler vor, wenn der Innenwiderstand des Amperemeters 1 % oder mehr des Lastwiderstandes beträgt.
Grundsätzlich sieht man, dass man Ströme und Spannungen an kleinen Widerständen am besten in der spannungsrichtigen Schaltung misst und an großen Widerständen lieber die stromrichtige Schaltung verwendet.

(a) (b) (c)

Abbildung 3.6: Digitale Multimeter in verschiedener Ausführung: (a) Keithley 2002 mit $8\frac{1}{2}$−Stellen (kostet ca. 6500€), (b) Agilent 34401 mit $6\frac{1}{2}$−Stellen, (c), (d) Fluke Handmultimeter mit (c) absetzbarer Anzeige und (e) Low-Cost (35€) Peaktech

3.4 Digitale Messung

Die Schlüsselkomponenten zur digitalen Messung elektrischer Signale sind

1. Verstärker mit hohem Eingangswiderstand (und hoher Verstärkung): Die Operationsverstärker.

2. Wandler von analogen Spannungen oder Strömen in digitale Signale

3. Die Digitale Signalverarbeitung und -Darstellung dahinter

Für bspw. Digital Multimeter müssen diese Komponenten vorhanden sein, sie müssen nicht besonders schnell sein. Ein paar Beispiele vom Hobby-Bereich für wenig Geld bis zum Hochleistungsgerät sind in Abb 3.6 aufgeführt. Darunter ist ein stark vereinfachtes Blockschaltbild eines Digitalen Multimeters gezeigt (Abb. 3.7). In diesem wurden nur die wichtigsten Funktionen, nämlich Gleich- und Wechselstrom und -spannung, sowie die Widerstandsmessung erwähnt. Weitergehende Funktionen, die heute auch in Digital Multimeter (DMM) zu finden sind, wie z.B. Frequenzmessung, Kapazitätsmessung, Dioden- und Durchgangsprüfungen sind der Übersicht halber außen vor geblieben.

3.4.1 Verarbeitung und Darstellung digitaler Signale

Der Computer versteht nur “0” und “1” und arbeitet daher im Binärsystem. Eine Stelle wird ein “Bit” (nix zum Trinken) genannt und 8 Bit ergeben ein Byte, mehrere Byte - je

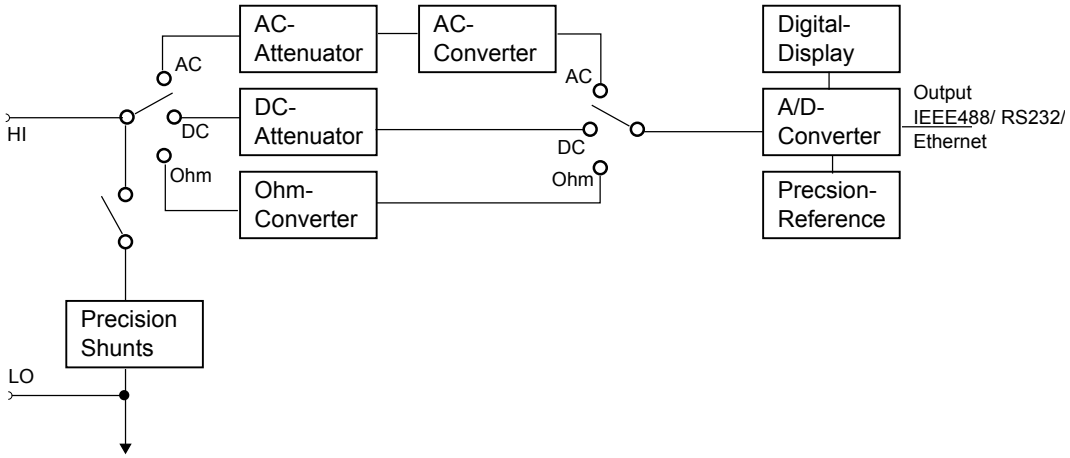


Abbildung 3.7: (sehr vereinfachtes) Blockdiagramm eines Digitalen Multimeters nach [6]

Tabelle 3.1: 5 Bit Binärsystem

Binär	Dezimal	Binär	Dezimal
0 0000	0	1 0000	16
0 0001	1	1 0001	17
0 0010	2	1 0010	18
0 0011	3	1 0011	19
0 0100	4	1 0100	20
0 0101	5	1 0101	21
0 0110	6	1 0110	22
0 0111	7	1 0111	23
0 1000	8	1 1000	24
0 1001	9	1 1001	25
0 1010	10	1 1010	26
0 1011	11	1 1011	27
0 1100	12	1 1100	28
0 1101	13	1 1101	29
0 1110	14	1 1110	30
0 1111	15	1 1111	31

nach Architektur - ergeben dann ein Wort. Die Darstellung im Binärsysytem für fünf Bit ist in Tabelle 3.1 enthalten.
Grundsätzlich können also mit N Binärstellen 2^N verschiedene Zustände dargestellt werden. Da die Null als ein Zustand schon mit zählt, ist die maximal darstellbare Zahl also

Tabelle 3.2: Spannungsstufen des LSB abhängig von der Auflösung

N	Auflösung	U_{LSB}/V bei $U_{max} = 2\,\mathrm{V}$
8	1/256	$7,81\,\mathrm{m}$
10	1/1024	$1,95\,\mathrm{m}$
12	1/4096	$488\,\mu$
14	1/16 384	$122\,\mu$
16	1/65 536	$30,5\,\mu$
20	1/1 048 576	$1,91\,\mu$
32	1/4 294 967 296	$466\,\mathrm{n}$

$2^N - 1$. Will man Spannung bis zur maximalen Spannung U_{max} mit N Binärstellen beschreiben, so teilt man diesen Spannungsbereich in $2^N - 1$ äquidistante Abschnitte auf und die Darstellung ist somit

$$U_{max} = (2^N - 1) \times U_{LSB}. \tag{3.8}$$

U_{LSB} ist die kleinstmögliche Auflösungsstufe. Sie entspricht der Schrittweite des niedrigstwertigsten Bits (Least Significant Bit = LSB). Anders herum ist dann

$$U_{LSB} = \frac{U_{max}}{2^N - 1}. \tag{3.9}$$

Man kann damit dann bei maximaler Spannung U_{max} Spannungsstufen gemäß Tabelle 3.2 auflösen.

Praktisch kommt in der Angabe der Leistungsfähigkeit von Digital Multimetern ein weiterer Parameter hinzu, der dem Menschen, der abliest, noch näher liegt, als die binäre Auflösung. Dieses ist die Anzahl der Stellen. Oft zeigen die Geräte Werte im Bereich $\pm 1,99\,...$ V an. Die erste Stelle kann nur den Wert "1" oder "0" annehmen. Man bezeichnet sie daher als halbe Stelle. Und so entsteht die Herstellerangabe von bspw. $6\frac{1}{2}$, was so viel heißt wie $\pm 1,999\,999\,\mathrm{V}$ können angezeigt werden. Eine Änderung der letzten Stelle bedeutet hier also eine Spannungsänderung von $1\,\mu$V oder relativ $0,5 \times 10^{-6}$ vom Maximalausschlag. Wie man aus obigen Tabellen 3.2, 3.3, abschätzen kann, werden dafür 21 Bit benötigt, ansonsten wäre diese Genauigkeit nicht darstellbar. Genauer ist natürlich

Tabelle 3.3: Stellen und Genauigkeiten (typische Genauigkeiten aus [3]) für DMM

Stellen	Anzeigeumfang	(rel.) Aufl.	(abs.) Aufl.	typ. Genau.	Bits
$3\frac{1}{2}$	$\pm 1,999$	5×10^{-4}	1 mV	0,25 %	11
$4\frac{1}{2}$	$\pm 1,999\,9$	5×10^{-5}	100 μV	0,05 %	15
$5\frac{1}{2}$	$\pm 1,999\,99$	5×10^{-6}	10 μV	0,01 %	18
$6\frac{1}{2}$	$\pm 1,999\,999$	5×10^{-7}	1 μV	0,005 % (Agilent 34410)	21
$7\frac{1}{2}$	$\pm 1,999\,999\,9$	5×10^{-8}	100 nV	0,001 %	25
$8\frac{1}{2}$	$\pm 1,999\,999\,99$	5×10^{-9}	10 nV	0,7 ppm (Keithley 2001)	28

die folgende Berechnung:

$$U_{max} = (2^N - 1) \times U_{LSB} \tag{3.10}$$

$$\Leftrightarrow 2^N = \frac{U_{max}}{U_{LSB}} + 1 \tag{3.11}$$

$$\Leftrightarrow N = \mathrm{ld}\left(\frac{U_{max}}{U_{LSB}} + 1\right) = \frac{\ln\left(\frac{U_{max}}{U_{LSB}} + 1\right)}{\ln(2)}. \tag{3.12}$$

Für U_{LSB} kann natürlich auch die *geforderte* minimale Spannungsstufe (Genauigkeit) eingesetzt werden. Das Ergebnis für N ist ggf. aufzurunden. Ergebnisse für verschiedene Genauigkeiten und Auflösungen sind in Tabelle 3.3 für Sie ausgerechnet.

3.4.2 Die Analog-Digital Wandlung

Die Welt ist analog. Wenn wir sie aber digital verarbeiten wollen, dann müssen wir die analogen Signale eben wandeln. Dieses geschieht in einem Analog Digital Wandler (Analog Digital Converter = ADC).

3.4.2.1 Parallelwandler

Die offensichtliche Umsetzung erfolgt in paralleler Form wie z.B. in [7] darstellt (Abb. 3.8). Die Komparatoren sind Operationsverstärker mit hoher Verstärkung und hohem Eingangswiderstand. Sie wirken hier als Schmitt-Trigger, denn sobald die Eingangsspannung am "+"-Eingang größer als die am "-"-Eingang wird, geht ihr Ausgangspegel von Niedrig (negative Versorgungsspannung oder Null) auf die positive Versorgungsspannung, bzw. den "High"-Pegel. Die Abstände der Referenzspannungen an den einzelnen Komparatoren ist genau U_{LSB}, so dass in genau dieser Schrittweite bei ansteigender Spannung U_{ein} jeweils ein High-Pegel der k_i hinzu kommt. Die Pegel werden als "1" oder "0" in den Latches

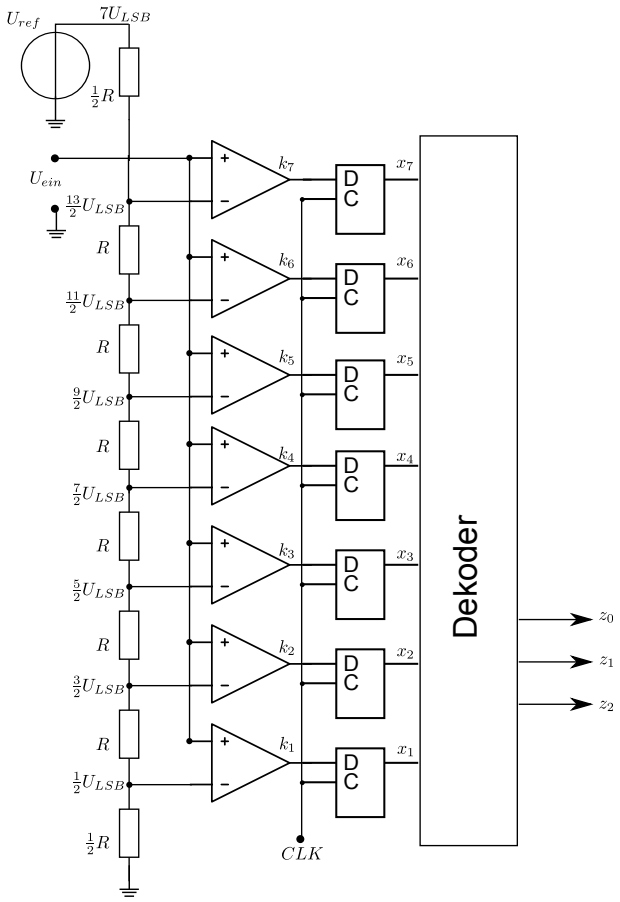


Abbildung 3.8: Analog Digital Converter (ADC) nach dem Parallelverfahren

(Flip-Flops) zwischengespeichert und nach Maßgabe des Clocks CLK an den Ausgang weitergeleitet. Dieses dient dazu, sicher zu stellen, dass nur zu bestimmten Zeiten, wenn valide Werte anstehen, die Werte an den Dekoder weitergeleitet werden. Ansonsten könnten durch unterschiedliche Laufzeiten und Geschwindigkeiten der Komponenten digitale Zwischenwerte entstehen, die im Dekoder zu erheblichen Fehlern führen würden. Je nach angelegter Spannung entstehen die in Tab. 3.4 binären Werte am Ausgang des ADC.
Die Vor- und Nachteile dieser Struktur liegen auf der Hand

+ Schnell (bis 2,2 GS/s), Maxim MAX108 und 109 [8]

+ Konzeptionell einfach

- Aufwändig (man braucht $2^N - 1$ Wandeleinheiten für N Bits), der o.g. 2,2 GS/s-Wandler hat daher auch nur 8 Bit

Insbesondere bei Anwendungen, die eine schnelle Reaktion, bei moderater Auflösung be-

Tabelle 3.4: Werte bei parallelem ADC

Spannung	Wert x_i	Ausgang z_i
$0 < U_{ein} \leq \frac{1}{2}U_{LSB}$	000 0000	000
$\frac{1}{2}U_{LSB} < U_{ein} \leq \frac{3}{2}U_{LSB}$	000 0001	001
$\frac{3}{2}U_{LSB} < U_{ein} \leq \frac{5}{2}U_{LSB}$	000 0011	010
$\frac{5}{2}U_{LSB} < U_{ein} \leq \frac{7}{2}U_{LSB}$	000 0111	011
$\frac{7}{2}U_{LSB} < U_{ein} \leq \frac{9}{2}U_{LSB}$	000 1111	100
$\frac{9}{2}U_{LSB} < U_{ein} \leq \frac{11}{2}U_{LSB}$	001 1111	101
$\frac{11}{2}U_{LSB} < U_{ein} \leq \frac{13}{2}U_{LSB}$	011 1111	110
$\frac{13}{2}U_{LSB} < U_{ein}$	111 1111	111

nötigen, kommen diese parallel Wandler zum Einsatz. Solche Anwendungen in der Messtechnik sind z.B. digitale Oszilloskope, von denen später in Abschnitt 3.6 die Rede sein wird. Auch in der modernen Kommunikationstechnik sind solch schnelle ADC gefragt.
Für Digitale Multimeter sind die parallelen Wandler eher ungeeignet, weil, wie aus Tabelle 3.3 zu ersehen, doch erhebliche Auflösungen erforderlich sind, während es eigentlich keine Geschwindigkeitsanforderungen gibt. Man kann also getrost die Daten seriell wandeln.

3.4.2.2 Dual Slope Wandler

Die in Digitalen Multimetern häufig verwendete Art der Analog Digital Wandlung ist der "Dual Slope Wandler", dessen Funktion auf dem Integrierer beruht, den wir daher zuerst vorstellen wollen.

Integrierer Hierzu betrachten wir zunächst einen idealen Operationsverstärker, der über eine Kapazität rückgekoppelt ist: Abb. 3.9.
Ein Spannungsumlauf ergibt

$$U'_{ein} + U_C = U_{aus} \tag{3.13}$$

Und da bei einem idealen Operationsverstärker aufgrund der unendlichen Verstärker die Differenzspannung U'_{ein} am Eingang Null sein muss, folgt schnell

$$U_{aus} = U_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\left[\int_0^t I_c(\tau)d\tau + Q_0\right]. \tag{3.14}$$

Da nun aber, obwohl am Eingang des OpAmps ein virtueller Ground vorliegt, der Eingang nun doch hochohmig ist, durch ihn also kein Strom fließt, ist der Strom durch die

- Weiterhin kommt es zu einem *Hold Step (Offset)*, der daher rührt, dass neben der gewollten Kapazität noch parasitäre Kapazitäten des Schalters und der Gates des zweiten Impedanzwandlers vorlegen. Der Sprung ist mit

$$\Delta U_a = \frac{C_S}{C} \Delta U_e \tag{3.29}$$

  abzuschätzen. Je größer die Speicherkapazität also ist, desto kleiner ist dieser Offset (und desto langsamer ist das Sampling).

- Zudem ist durch den Schalter der Ausgang nicht vollständig vom Eingang entkoppelt, so dass es durch Leckströme noch zu einem *Feedthrough* kommt. Hier folgt also die Spannung am Ausgang von ein wenig der Spannung am Eingang.

- Als letztes wird natürlich die Kapazität durch den Impedanzwandler (leicht) entladen, es kommt zur Haltedrift (*Droop*). Die Rate ist

$$Droop\ Rate = \frac{dU_a}{dt} = \frac{I_L}{C} \tag{3.30}$$

  und mit kleinen Strömen im pico-Ampere Bereich sehr klein.

3.4.4 Der Eingang selber

Der Eingang eines Voltmeters in digitaler Bauart ist der Eingang eines Operationsverstärkers. In diesem Sinne ist die Eingangsimpedanz auch davon geprägt und somit sehr hochohmig (tlw. $\gg 10\,\mathrm{M}\Omega$).
Bei einer reinen Spannungsmessung kann der Messbereich nun einfach mittels eines Spannungsteilers eingestellt werden (Abb. 3.14, [2]).
Die Spannung U_m ist also nur ein Teil der Eingangsspannung

$$U_{m,N} = U_e \times \frac{R_{unten}}{R_{ges}} = U_e \times \frac{\sum_{n=1}^{N} R_n}{10\,\mathrm{M}\Omega}. \tag{3.31}$$

Es liegen also Teilungsverhältnisse von 1:1 bis 1:10 000 in Zehnerschritten vor.
Die Strommessung erfolgt durch einen Parallel-Widerstand, über dem die abfallende Spannung gemessen wird (Abb. 3.15 gemäß [12, 13]).
Eine Messbereichserweiterung zur Strommessung ist in Abb. 3.16 gezeigt. Eine einfache Wahl wäre gewesen, dem eigentlichen Messwerk einfach Widerstände parallel zu schalten und so den Strom zu teilen. Doch so hätten sich Kontaktwiderstände an den dann notwendigen Schaltern ergeben, die parallel zum Messwerk liegen und dadurch, insbesondere bei

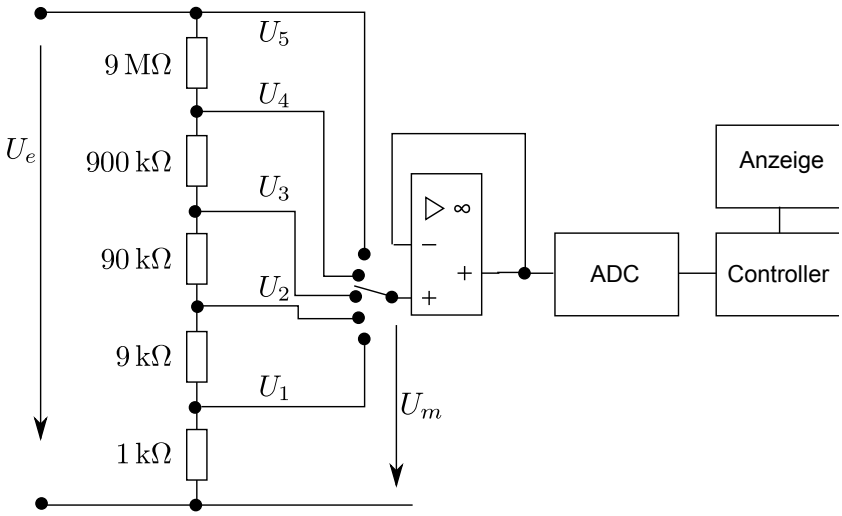


Abbildung 3.14: Messbereichsumschaltung bei DMM

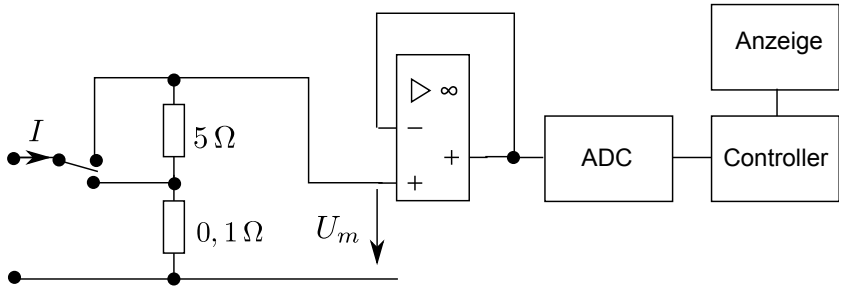


Abbildung 3.15: Strommessung mit DMM

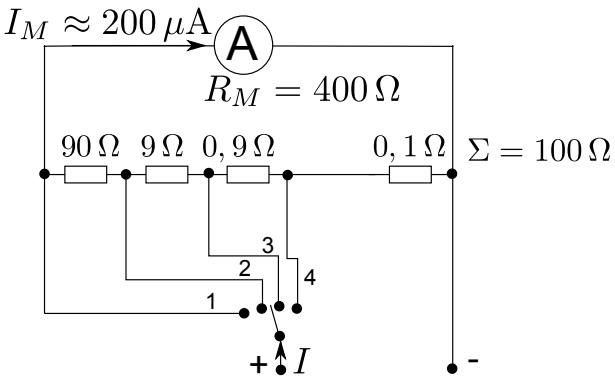


Abbildung 3.16: Messbereichserweiterung zur Strommessung

kleinen Widerständen, das Teilungsverhältnis unkontrollierbar beeinflussen. In der oben gezeigten Schaltung ist dieses nicht der Fall. Die Kontakte der Schalter liegen in Reihe zum Messwerk und beeinflussen die Messung nicht, wohl aber natürlich den Innenwiderstand

- Messung von Ladungen (also integrierte Ströme) (bis zu 10^{-14} As $\approx 62\,000\,e$). Dieses ist eine Muss-Funktion, denn ansonsten verdient das Gerät seinen Namen nicht.

Das Elektrometer ist also ein Gerät mit ähnlichen Funktionen wie das DMM, jedoch mit verändertem, erweitertem Messbereich.

Nanovoltmeter Das Nanovoltmeter hat einen nach unten erweiterten Spannungsmessbereich, mit einer Empfindlichkeit bis hinunter zu 1 pV.

Picoamperemeter Das Picoamperemeter ist einfach ein abgespecktes Amperemeter aus dem Elektrometer. Es ist damit preislich günstiger. Um einen weiteren Strombereich messen zu können ist es u.U. mit einem logarithmischen Messwerk ausgestattet, das eine gezieltere Ausnutzung des ADC erlaubt.

3.6 Signale im Zeitbereich: Oszilloskope

Die meist verwendeten Messgeräte, die eine zeitliche Auflösung des Signals (der Spannung) ermöglichen sind die Oszilloskope. Das Funktionsprinzip basierte Jahrzehnte darauf, dass ein, in ein Vakuum geschossener Elektronenstrom durch ein elektrisches Feld abgelenkt wird. Die auf eine phosphorizierende Schicht auftreffenden Elektronen erzeugen einen Leuchtpunkt, der einige Zeit nachleuchtet und von uns Menschen beobachtet werden kann. Das elektrische Feld wird durch eine Spannung erzeugt, die an zwei parallelen Platten anliegt. Vertikal legt man typischerweise die anzuzeigende Spannung an und horizontal liegt dann eine Spannung, die der Zeit proportional ist. So ergeben sich die berühmten Bilder.
Doch dieses ist weitgehend Geschichte. Heute sind die Oszilloskope ebenso digital. Sie bestehen daher - ganz grob gesprochen - aus einem sehr schnellen digitalen Voltmeter (ADC), einem Mikrocontroller, bzw. PC, auf dem ggf. sogar Windows läuft, und einem Display, das die Daten dann darstellt. Abb. 3.18 zeigt ein Blockdiagramm eines solchen Oszilloskops, in Abb. 3.17 sind einige Beispiele von Oszilloskopen abgebildet.
Natürlich ist die Eingangsstufe des “Oszis” etwas anders und vor allem weniger auf hohe Auflösung als auf Geschwindigkeit getrimmt, als beim DMM, doch das Prinzip ist sehr ähnlich.

(a) (b)

Abbildung 3.17: Einige Oszilloskope (a) Rohde und Schwarz Real Time Oscilloscope (b) Hameg und (c) Tektronix (DAS Workhorse)

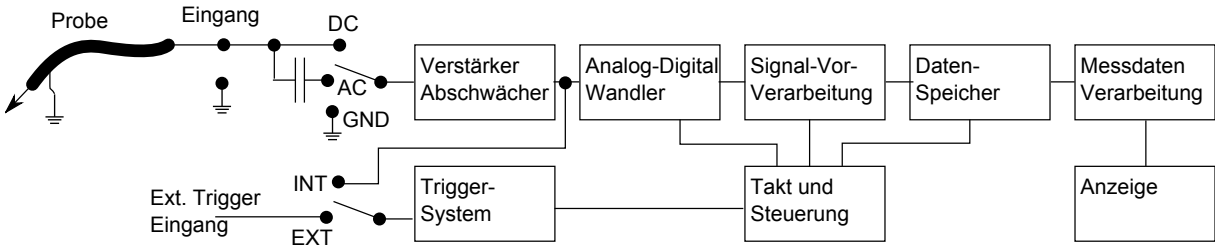


Abbildung 3.18: Blockschaltbild eines Digitalen Oszilloskops

3.6.1 Die Abtastung

Also erstes wollen wir uns der Abtastung zuwenden. Ein Signal wird wie in Abb.3.19 digital dargestellt. Das Signal wird durch Stufen approximiert. Wie groß diese Stufen sind, hängt von der Anzahl der Bits des ADC (und der Darstellung) ab. Oszilloskope haben oft 8 Bit Wortbreite zur Abtastung. Die minimale horizontale Größe ist durch die Abtastrate vorgegeben und eines der hervorstechendsten Unterscheidungsmerkmale der Oszis. Diese Rate liegt je nach Typ zwischen wenige Millionen bis 20 Milliarden Abtastungen (Samples) pro Sekunde.
Welches ist die höchste Frequenz, die man so abgetastet noch (sinnvoll) darstellen kann?

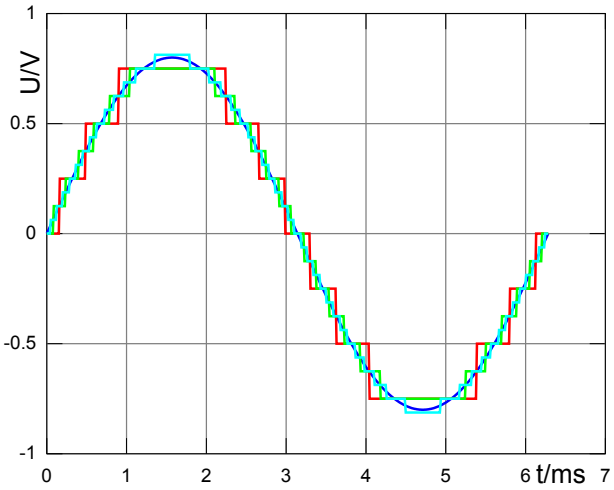


Abbildung 3.19: Digitales Abtasten eines analogen Signals (blau) mit 2, drei und vier Bit. Die maximale Amplitude des Sinus fällt (wie in der Realität) nicht mit der maximalen Spannung des ADC zusammen.

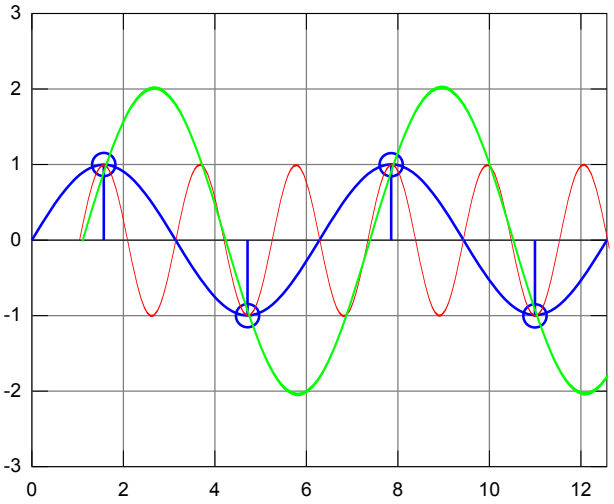


Abbildung 3.20: Abtasten eines Signals an der Grenze. Nyquist-Bedingung

Eine Antwort auf diese Frage gibt Abb. 3.20. Hier sind verschiedene Fälle der Abtastung dargestellt und auch denkbare Unterabtastungen und Fehler dargestellt. Grundsätzlich (Nyquist-Kriterium) muss die Abtastrate mindestens doppelt so groß sein, wie die höchste darzustellende Frequenz:

$$f_{sample} \geq 2 \times f_{max}. \tag{3.34}$$

Dieser Fall ist für den blauen und den roten Sinus mit langsamer Frequenz dargestellt. wenn man *genau* mit der doppelten Frequenz abtastet nur nicht mit *etwas* darüber, dann kann man aber keine Aussage über die Phase und die Amplitude machen. Im schlimmsten

Oszilloskop	Bandbreite (3 dB)	Abtastrate	Vert. Auflösung
Rohde & Schwarz RTO 102X	2 GHz	10 GS/s	8 Bit
Tektronix TPS2012B	100 MHz	1 GS/s	8 Bit

Tabelle 3.6: Bandbreite und Abtastrate verschiedener digitaler Oszilloskope [14, 15]

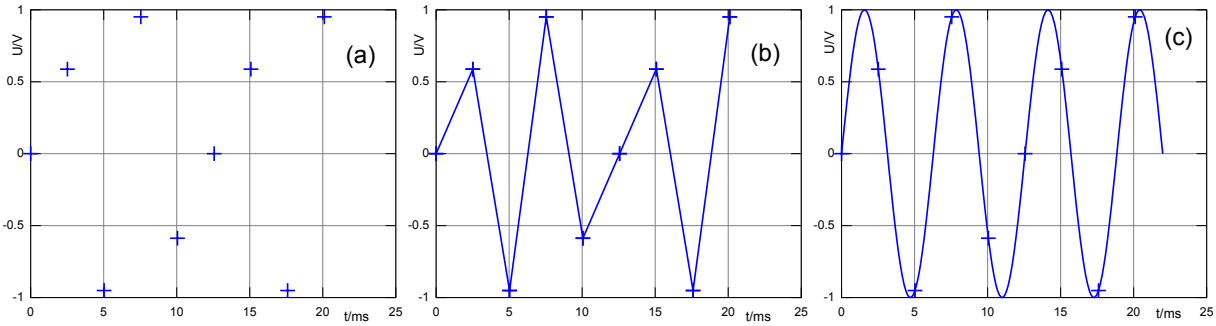


Abbildung 3.21: Abtasten eines Sinus-Signals (a) die Punkte, (b) eine mögliche Darstellung mittels linearer Interpolation und (c) die "wahre", tiefpassgefilterte Darstellung

Fall könnte der "blaue" Sinus auch in den Nulldurchgängen abgetastet werden und man fände ihn nicht. In rot ist noch ein Sinus-Signal mit der dreifachen Frequenz dargestellt. Auch dieses könnte ein möglicher Ursprung für die gezeigten vier Abtastpunkte sein. da wir aber sicher sind, dass die höchste vorhanden Frequenz nur bei der Hälfte der Abtastrate lag, können wir dieses ausschließen, aber nur deshalb!
In der Regel tastet man deutlich über der Nyquistfrequenz ab, so dass bei Oszilloskopen in der Regel die Abtastrate (Samples/Sekunde) ein Vielfaches der Bandbreite der Eingangsstufen ist. Die Bandbreite - das zweite wichtige Kriterium der Geräte - gibt die Grenzfrequenz der Eingangsfilter an. Diese definiert eben die Frequenz, die "nur" um drei dB (also auf ca. 70 %) gedämpft wird (Abb. 3.22):

$$f_g : \; U_{anzeige} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{ein}. \tag{3.35}$$

Wie aus Abb 3.21 zu ersehen, gibt selbst ein Abtasten unter Beachtung des Nyquistkriteriums noch keine vollständige Sicherheit über den Kurvenverlauf. Zwar wurde hier auch einmal sehr nahe dem Minimum und dem Maximum abgetastet, doch wie konstruiert man aus den Punkten in (a) in der Darstellung den Verlauf. Der Verlauf in (b), der durch einfach lineare Interpolation entsteht ist jedenfalls falsch. Wir wissen, dass die höchste mögliche Frequenz nur das doppelte der Abtastfrequenz sein kann, daher kann (b) nicht zutreffen, denn die scharfen Knicks in der Kurve an den Abtastpunkten hätten spektral Signalanteile, die deutlich über dieser Nyquistfrequenz liegen. Sinnvoll ist daher nur der

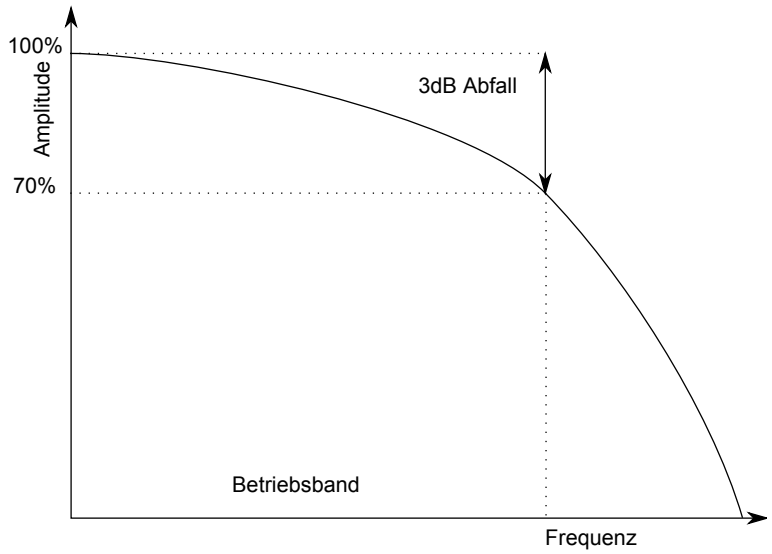


Abbildung 3.22: Schematische Darstellung der 3 dB-Bandbreite

Verlauf in (c), er könnte durch Up-sampling und dann Tiefpass-filtern des entstanden Signals gewonnen werden. Im Zeitbereich wird dieses durch eine Interpolation mittels einer $\sin(x)/x$ Funktion dargestellt [14], doch das ist ein Kapitel für die Signalverarbeitung.
Zur Abtastung von Rechteck-Signalen, z.B. Takten (Clocks) sollte man - Daumenregel - eine Abtastrate des fünffachen der Taktrate verwenden.

Dezimation Im täglichen Gebrauch tritt häufiger der Fall auf, dass man zu viele als zu wenige Abtastpunkte hat. So stehen schon bei einer Abtastrate von 1 MS/s in 10 ms zehntausend Punkte zur Verfügung, der Bildschirm erlaubt aber nur die Darstellung von eintausend Punkten. Für jeden Bildschirmpunkt liegen also zehn Samples vor, man muss dezimieren. Lösungen hierfür sind bspw. (Abb. 3.23):

Sample greift einfach einen Punkt heraus, irgendeinen.

Peak Detect (Min/ Max) der minimale und/ oder maximale Wert werden verwendet. Werden beide dargestellt, ergibt sich ein Korridor, bzw. ein vertikaler Strich.

Average (auch *High Resolution* genannt: Hier wird der arithmetische Mittelwert gebildet und der wird darstellt. Das reduziert das Rauschen und andere statistische Schwankungen, die Wellenform wird also glatter.

Root Mean Square (RMS) Hier wird der quadratische Mittelwert gebildet, damit entspricht das Mittel (RMS) die momentane Leistung.

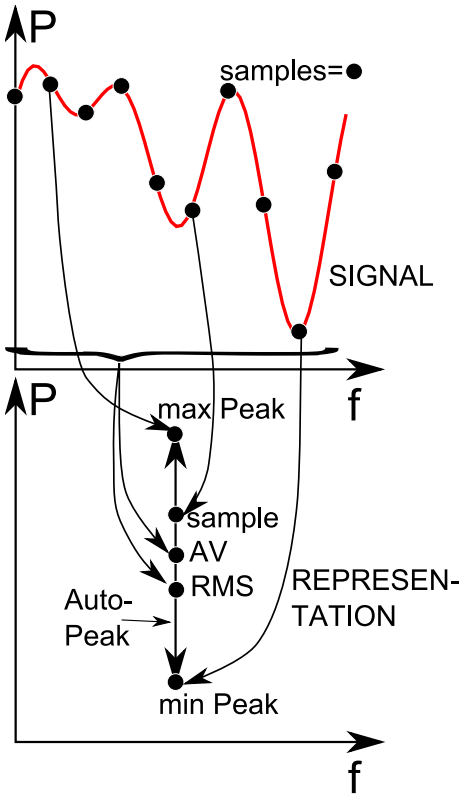


Abbildung 3.23: Auswirkungen der Dezimation

3.6.2 Der Trigger

Signale mit mehreren MHz Bandbreite sind schnell, zu schnell als dass wir Menschen sie erfassen können, also müssen wir die Effekte verlangsamen und ggf. in stehenden Bildern darstellen.
Oszilloskope bieten die Möglichkeit, die Anzeige auf das zu messende Signal zu synchronisieren. Das Signal wird also zunächst sehr grob analysiert. Wie in Abb. 3.18 gezeigt, erfolgt dieses auch heute (2011) noch häufig im analogen Teil des Oszilloskopes. Erst wenige Exemplare besitzen vollständig digitale Trigger-Einheiten. Erst wenn das Signal eine (einfache) vorgewählte Eigenschaft erfüllt, werden die Aufzeichnung und Signaldarstellung gestartet. Einige dieser Bedingungen können sein

- Über- oder Unterschreiten einer bestimmten Schwelle
- Über- oder Unterschreiten einer bestimmten Schwelle bei gleichzeitig einer steigenden oder fallende Flanke (das ist wohl der häufigste Trigger)
- Externes Signal geht auf “High” oder “Low”

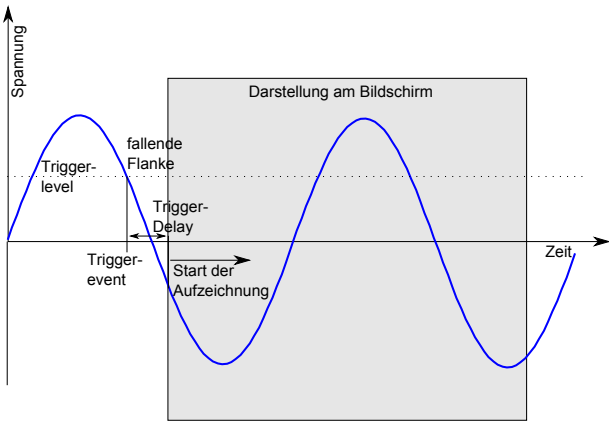


Abbildung 3.24: Trigger in einem Beispiel

In Abb 3.24 ist ein Beispiel für dei Darstellung am Bildschirm für einen Signalverlauf gezeigt. Hier wird auf einen Wert an der fallenden Flanke getriggert und es wird dann der Kurvenverlauf nach einer festgelegten Zeit dargestellt. Ist die Zeit der Darstellung vorbei (Bildschirm rechts beendet), dann wird auf das nächste Trigger Event gewartet. Dieses kann allerdings vergleichsweise lange dauern, so dass nicht - wie man annehmen möchte - gleich die nächste fallende Flanke wieder auslöst, nein, es können Vielfache der dargestellten Zeitdauer vergehen, bis das Oszilloskop wieder bereit ist. Das ist bei echt periodischen Signalen kein Problem, sollte man seltene Events suchen, dann wird es zu einem (Problem). Das Trigger Delay kann auch negativ werden, dann wird eben Signal zwischengespeichert und nach Auslösen des Triggers komplett - mit dem Verlauf *vor* dem Trigger - dargestellt.

3.6.3 Probes

Der Kontakt zum Prüfpunkt wird über eine so genannte *Probe* hergestellt. In Abb. 3.25 ist die Explosionszeichung eines solchen Systems einmal dargestellt [16]. Essentiell sind die folgenden Elemente:

1. Kontaktierhaken (Hook), um (fest) an einen Prüfpfosten anzukoppeln. Dieser muss nicht verwendet werden, man kann natürlich auch mit der Probe direkt auf einen Punkt in der Schaltung kontaktieren, dann allerdings muss die Probe irgendwie anders (manuell) gehalten werden. Es sind viele andere mechanische Ausführungen dieses Elementes denkbar und vorhanden.

2. Leitung zur Kontaktierung an Masse, inklusive der Klemme, dient zur Herstellung der Masseverbindung. Grundsätzlich sollte insbesondere bei schnellen Signalen die

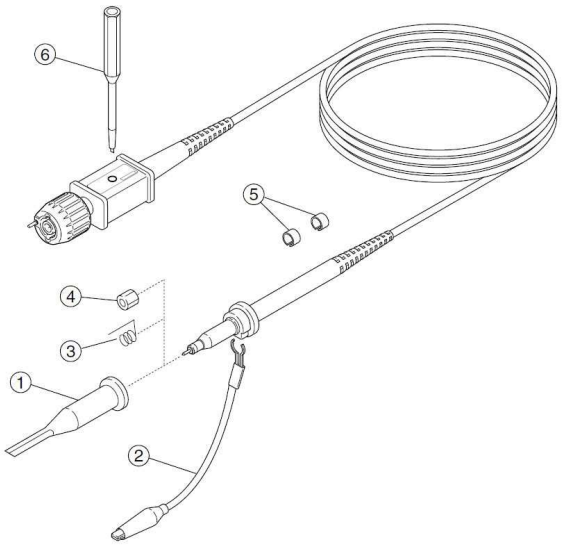


Abbildung 3.25: Passive Oszilloskop-Probe [16]

Masseverbindung so kurz wie möglich sein.

3. Daher existiert bei dicht gelegenen Massekontaktiermöglichkeiten noch eine zweite Möglichkeiten die Masse anzuschließen.

Weitere, nicht im Bild nummerierte Elemente sind:

- Die eigentliche Probe (Vorne im Bild), in der die Aufnahme des Signals erfolgt
- Das Kabel, meist koaxial ausgeführt, das das Signal an ds Oszilloskop (Anzeigegerät) weiterleitet
- Der Anschluss an das Oszilloskop

Die ideale Probe sollte folgende Eigenschaften erfüllen [17]:

Einfache Verbindung und bequeme Nutzung Es soll Spaß machen, die Probe zu benutzen und es soll leicht möglich sein an allen denkbaren Punkten gut und einfach zu kontaktieren und alle gewünschten Messpunkte leicht zu erreichen. Dieses gilt auch für die Masseverbindung. Zudem soll die Verbindung halten und nicht sieben Hände erfordern oder dauernd abfallen.

Absolute Signalgenauigkeit Das Signal an der Messspitze muss genau so an das Oszilloskop weitergeleitet werden, wie es aufgenommen wurde.

Keine Belastung der Signalquelle Wie bei Volt (oder Ampere)metern auch, darf die Messspitze keinen Einfluss auf die eigentliche Schaltung haben, wenn doch, dann wird nämlich das Signal systematisch verfälscht.

Rauschfreiheit Durch die Messung und von der Messaparatur soll keinerlei Rauschen aufgefangen werden.

Da die o.g. Anforderungen nicht ideal erfüllt werden können, gibt es für unterschiedliche Messanforderungen unterschiedliche Lösungsangebote, von denen einige kurz beschrieben werden

Passive Probes sind die Arbeitspferde in der Signalmesstechnik, sie werden über einen weiten Spannungs- (600 V) und Frequenzbereich (typ. 500 MHz) verwendet, um ein Signal abzunehmen. Aus Sicht der zu messenden Schaltung stellen sie eine Parallelschaltung von Widerstand (typ. 10 MΩ) und Kapazität (typ. 10 pF) in Serie mit der Induktivität zu Ground dar (Abb. 3.26).

Aktive Spannungs Probes sind im Gegensatz zu den Erstgenannten mit einer aktiven Abnahme des Messsignals ausgestattet (Operationsverstärker/ Messverstärker). Daher ist ihr Eingangswiderstand größer (oder gleich), vor allem die Kapazität aber geringer (typ. <1 pF) und der Spannungsbereich natürlich deutlich geringer (typ ±10 V). Der Frequenzbereich (Bandbreite) wird dadurch deutlich erhöht.

Strom-Probes messen im Prinzip das magnetische Feld, das einen stromführenden Leiter umgibt und zeigen daraus abgeleitet eben diesen Strom an.

Differentielle Probes sind dazu geeignet nicht-Masse bezogene so genannte differentielle Signale besser abzunehmen.

Hochspannungs Probes tun das, was der Name sagt bis in den >10 kV Bereich

Hier nicht aufgeführte Probes gibt es auch und werden hier nicht erläutert.

Das Ersatzschaltbild (aus Sicht der zu messenden Schaltung) einer Messspitze ist in Abb. 3.26 gezeigt. Hier soll der Signalverlauf über dem Widerstand R_m in der Schaltung gemessen werden. Durch die Probe, die vereinfachend als eine Parallelschaltung von R und C beschrieben werden kann, und die Induktivität L_{GND} des Drahtes zur Masse

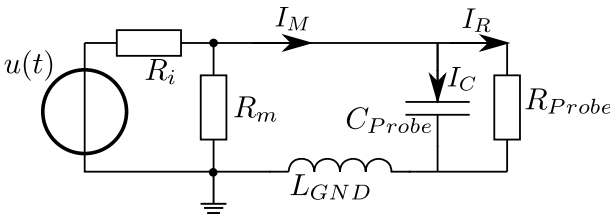


Abbildung 3.26: Ersatzschaltung einer Probe in einer Messumgebung

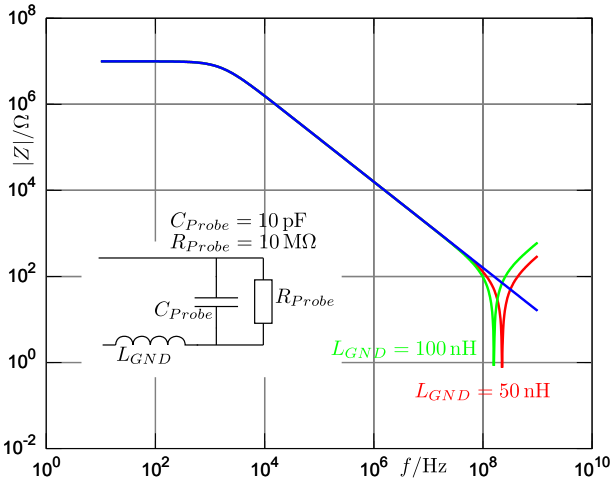


Abbildung 3.27: Betrag der Impedanz für verschiedene Werte der RLC-Kombination

wird der Schaltkreis belastet. Die Impedanz der Schaltung beträgt

$$Z_{Probe} = R_{Probe}||C_{Probe} + j\omega L_{GND} = \frac{1}{\frac{1}{R_{Probe}} + j\omega C_{Probe}} + j\omega L_{GND} \quad (3.36)$$

$$= \frac{R_{Probe}}{1 + j\omega R_{Probe} C_{Probe}} + j\omega L_{GND}, \quad (3.37)$$

wobei die “nackte” Probe natürlich nur durch das RC-Glied beschrieben wird und damit

$$Z_{Probe,nackt} = \frac{R_{Probe}}{1 + j\omega R_{Probe} C_{Probe}} \quad (3.38)$$

$$= \frac{R_{Probe} - j\omega R_{Probe}^2 C_{Probe}}{1 + \omega^2 R_{Probe}^2 C_{Probe}^2}. \quad (3.39)$$

Der Verlauf ist in Abb. 3.27 dargestellt.
Mit der unvermeidlichen Verbindung zur Masse, die oft über recht lange einfache Drähte

ausgeführt werden muss, ergibt sich wieder

$$Z_{Probe} = \frac{R_{Probe}}{1 + j\omega R_{Probe} C_{Probe}} + j\omega L_{GND} \tag{3.40}$$

$$= \frac{R_{Probe} - j\omega R_{Probe}^2 C_{Probe}}{1 + \omega^2 R_{Probe}^2 C_{Probe}^2} + j\omega L_{GND}. \tag{3.41}$$

Auch dieser Verlauf ist in Abb. 3.27 dargestellt. Für sehr großes R_{Probe}, und so ist es in der Regel, erhalten wir

$$\lim_{R_{Probe}\to\infty} Z_{Probe} = \frac{R_{Probe}}{j\omega R_{Probe} C_{Probe}} + j\omega L_{GND} \tag{3.42}$$

$$= j\left(-\frac{1}{\omega C_{Probe}} + \omega L_{GND}\right). \tag{3.43}$$

Dieses verschwindet, und damit eben auch (näherungsweise) die komplette Impedanz der Messspitze, bei

$$\frac{1}{\omega C_{Probe}} = \omega L_{GND} \tag{3.44}$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 = \frac{1}{C_{Probe} L_{GND}} \tag{3.45}$$

$$\Leftrightarrow f = \frac{1}{2\pi\sqrt{C_{Probe} L_{GND}}}. \tag{3.46}$$

Deutlich sichtbar sind die Resonanzen durch die (näherungsweise) Serienschaltung von L und C. Es wurde verwendet, dass $R = 10\,\mathrm{M}\Omega$, $C = 10\,\mathrm{pF}$ ist. Für die Induktivität der Drahtschleife zur Masse wurde nach [18, S.E13] ein Wert von $L_{GND} = 10\,\mathrm{nH} \times \frac{l}{\mathrm{cm}}$ zugrunde gelegt. Die Längen sind 5 und 10 cm, die Induktivitäten daher 50 und 100 nH. Diese Resonanz ist ebenso bei einer Rechteckanregung sichtbar und äußert sich dort durch "Ringing" an Pulsflanken. Eine genaue mathematische Analyse der Problematik ist an dieser Stelle der Vorlesung noch nicht möglich. Der Einfluss verschiedener Arten des Groundings ist in Abb. 3.28 gezeigt [19].
Weitere wichtige Angeben für Messspitzen (Probes) sind:

Bandbreite ist die vom Hersteller angegebene Frequenz, bis zu der die Probe verwendet werden kann bzw. soll. Normalerweise ist das die 3 dB-Frequenz, bei der also die angezeigte Spannung nur noch 70 % der tatsächlich anliegenden Spannung beträgt. (Siehe auch Abb. 3.22). Zweckmäßig ist es, wenn Bandbreite des Oszilloskopes und der Probe zusammen passen.

(a)

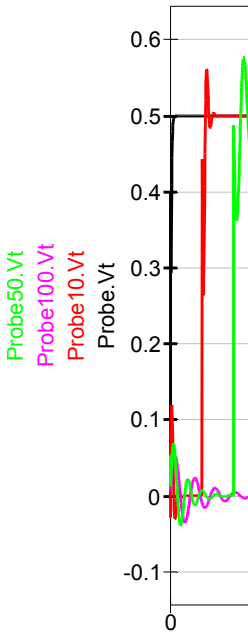


Abbildung 3.28: Einfluss verschiedener Arten der Masseverbindung nach [19] (a) und mit $L = 0; 10; 50; 100\,\mathrm{nH}$ (schwarz, rot, grün, violett) und jeweils verzögert in QUCS simuliert (b).

Attenuation Factor ist meist 10 und bedeutet, dass die am Ausgang der Probe zum Oszi weitergeleitete Spannung nur noch ein Zehntel der tatsächlich anliegenden Spannung ist. Moderne Oszi erkennen und kompensieren dieses automatisch. Intern handelt es sich einfach um einen Spannungsteiler von bspw. 9 zu $1\,\mathrm{M}\Omega$.

3.6.4 Aufgaben

1. Beschreiben Sie die Begriffe “Abtastrate”, “Auflösung” und “Bandbreite” bei Digitaloszilloskopen!

2. Welche Darstellung (Detector bzw. Decimation) verwenden Sie in den folgenden Fällen:

(a) Darstellung eines langsamen Signals mit kleiner Amplitude?

(b) Auffinden eines kurzen hohen Impulses mit der Möglichkeit, die maximale Amplitude zu finden?

(c) Bestimmung der momentanen Leistung an einem Widerstand?

(d) Darstellung eines sehr schnellen periodischen Signals mit mindestens 1 V Amplitude?

3. Welche Bandbreite und Abtastrate benötigen Sie, um ein periodisches Signal mit $f_{max} = 120\,\text{MHz}$ mit einem Fehler von maximal als 70 % darzustellen? Schätzen Sie dieses ggf. mit einer Zeichung ab! Welche Parameter des Oszilloskopes würden Sie ändern, bzw. wählen, um eine höhere Genauigkeit zu erhalten?

4. Warum haben viele Oszilloskope nur eine geringe Wandlerbreite?

Kapitel 13

Spektralanalyse

Spektrum-Analysatoren, die an der DHBW zur Verfügung stehen, sind in Abb. 13.1 gezeigt. Diese beiden Modelle entstammen aus unterschiedlichen Generationen. Das Gerät in Abb. 13.1(b) benutzt als Betriebssystem übrigens Windows und unterstützt die Analyse aktueller Digitaler Kommunikationsstandards.

13.1 Zeitbereich und Spektrum

Bislang lag der Fokus der Ausführungen hier auf Signalen im Zeitbereich, z.B. eine bestimmte Spannung zu einer Zeit, ein Zeitverlauf eines Signals, dargestellt mittels Oszilloskop oder auch die speziellen Mittelwerte periodischer Signale. In vielen Fällen bietet sich eine Analyse der Frequenzabhängigkeit eines Signales an; oft, wie z.B. bei sehr hochfrequenten Signalen, ist dieses die beste oder einzig sinnvolle Betrachtungsweise. Im Folgenden wird implizit von periodischen Signalen ausgegangen, obwohl diese Einschränkung

(a) (b)

Abbildung 13.1: Spektrum-Analysatoren der DHBW. Von Hewlett-Packard (heute Agilent) (a) Vertrieben um 2000 und (b) von Rohde und Schwarz ein aktuelleres Modell.

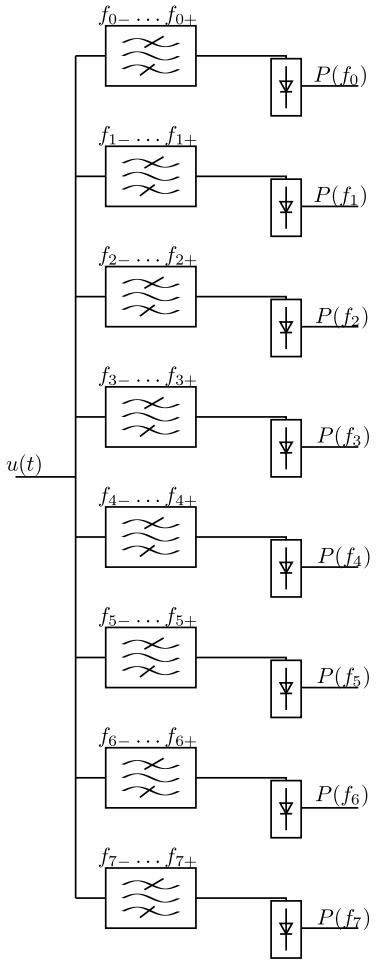
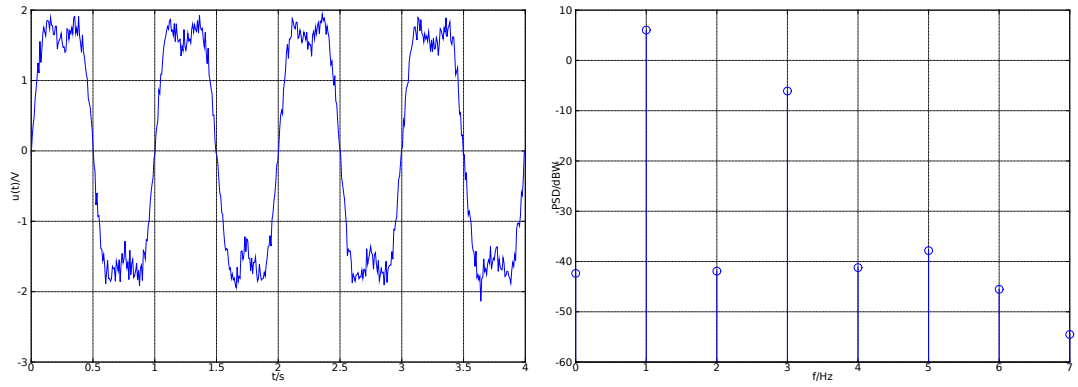


Abbildung 13.2: Filterbank zur Spektralanalyse



(a) (b)

Abbildung 13.3: Verrauschtes Signal (a) und Spektralanalyse mit 8-fach Filterbank (b).

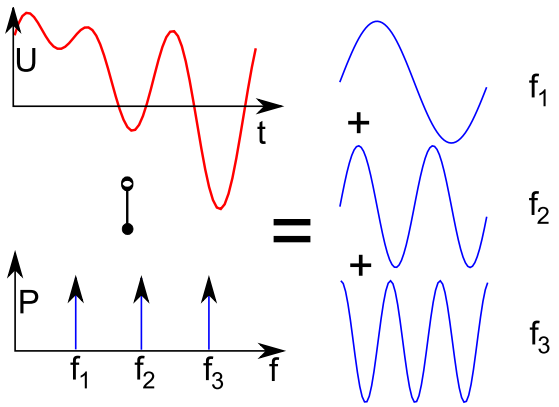


Abbildung 13.4: Darstellung eines Zeitbereichssignals als Spektrum.

sicher nicht an allen Stellen notwendig wäre. Eine konzeptionell einfache, aber praktisch in der Messtechnik sehr aufwändig zu realisierende Methode zur Spektralanalyse ist eine Filterbank wie in Abb. 13.2 gezeigt. Hier wird ein Signal durch - hier acht - Filter in die entsprechenden Komponenten zerlegt. Zweckmäßigerweise wählt man überlappende oder aneinandergrenzende Filter mit $f_{n-1,+} \geq f_{n,+}$ und $f_{0-} = f_{min}$, $f_{N+} = f_{max}$, so dass keine Lücken im Spektrum entstehen. Die Mittenfrequenzen der Filter sind dementsprechend f_n und am Ausgang dieser entsteht ein Signal, das eine Leistung in dem betrachteten Frequenzbereich aufweist. Dieses kann man als Leistungsdichte $P(f_n)/(f_{n+} - f_{n-})$ bezeichnen.
In Abb. 13.3 ist eine solche Spektralanalyse mit acht Filtern gezeigt. Am Eingang liegt ein Signal der Form

$$u(t) = 2\,\mathrm{V}\sin(2\pi t) + 0.5\,\mathrm{V}\sin(6\pi t) + u_n(t) \tag{13.1}$$

mit weißem Rauschen $\sqrt{\overline{u_n(t)}} = 0,1\,\mathrm{V}$ vor. Mit einer Analyse mit den sinnvoll gewählten Filtern ergibt sich der in Abb. 13.3(b) dargestellte Leistungsgehalt in den entsprechenden Frequenzbändern. Vor allem, wie erwartet, findet man Leistung bei den Frequenzen ein und drei Hertz. Wie in Abb. 13.4 dargestellt und aus der Mathematik - insbesondere der Fourieranalyse [37] - bekannt, kann dieses Konzept auf beliebige periodische und sogar nicht-periodische Funktionen erweitert werden.
Es gibt weitere praktische Gründe, warum in manchen Disziplinen der Elektrotechnik die Spektralanalyse weit verbreitet ist:

- In der Nachrichtentechnik werden die Nutzsignale einer definierten Bandbreite auf einen Träger moduliert und dieser wird ausgesendet. Die Regulierungsbehörden weisen Diensten Frequenzbereiche zu, die eingehalten werden müssen. Das gesamte

Frequenzspektrum ist so aufgeteilt. Zum Nachweis der Einhaltung der Grenzen und auch zur Entwicklung bieten sich Spektralanalysen an.

- Bei sehr hochfrequenten Signalen ist eine Analyse im Zeitbereich schlicht nicht möglich oder sinnvoll. Sehr wohl technisch möglich ist aber eine Filterung des Signals mit anschließender Leistungsmessung, also eine Spektralanalyse.

- Bei periodischen Signalen sind Zeit- und Frequenzbereich dual zueinander. Es ist also eine Frage des Geschmacks und der Effizienz, für welche Darstellung man sich entscheidet. Für einige Applikationen fiel die Wahl auf den Frequenzbereich.

13.2 Spektrum-Analysator

13.2.1 Aufbaus und Architektur

So konzeptionell einfach die Darstellung als Filterbank ist, in aller Regel wird man einen Spektrumanalysator nicht so aufbauen. Etwas praktischer, aber immer noch nicht wirklich implementierbar, wäre es, ein durchstimmbares Bandpassfilter zu verwenden. Dieses würde man in Schritten in der Mittenfrequenz verändern, eine Leistungsmessung vornehmen, diese tabellieren und das Filter weiter verändern, bis das komplette Spektrum durchlaufen ist. Dieses klingt einfach, doch steckt die Herausforderung in den durchstimmbaren Filtern, die sehr schwer zu realisieren sind. Aus diesem Grund sind nahezu alle käuflichen Spektrumanalysatoren mit festen Bandpassfiltern realisiert. Das Eingangssignal wird mithilfe eines Mischers und durchstimmbaren Lokaloszillators in der Frequenz so umgesetzt, dass immer die gewünschte Frequenzkomponenten am Filter „vorbeikommt“. Eine klassische - superheterodyne, also mit mehreren Zwischenfrequenzen aufgebaute - Architektur eines „Specis“ ist in Abb. 13.5 gezeigt. Sehr gute Einführungen in die Spektralanalyse und die Verwendung von Spektrumanalysatoren über diese Schrift hinaus sind in [38, 39] zu finden.
Die einzelnen Blöcke sind

Dämpfungsglied und evtl. DC-Blocks zum Schutz des Analysators und Signalkonditionierung zur ggf. Erhöhung des Dynamikbereichs zu höheren Leistungen.

Eingangstiefpass zur Limitierung von Rauschen und anderen Störungen im nicht analysierten Frequenzbereich und um Eindeutigkeit der Signale herzustellen (Unterdrückung höherer Frequenzen).

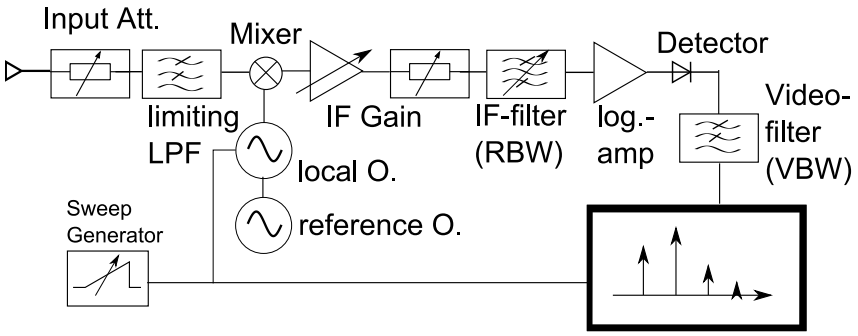


Abbildung 13.5: Klassische Realisierung eines Spektrum-Analysators in Super-Heterodyn-Architecktur.

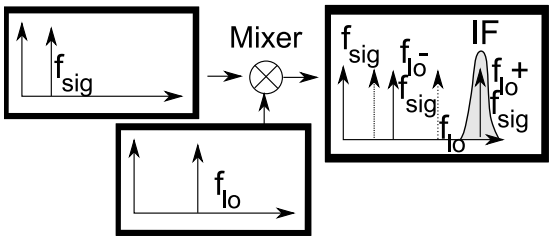


Abbildung 13.6: Vereinfachte Darstellung eines Mischers.

Mischer , dargestellt in Abb. 13.6, ist ein nichtlineares Element, typischerweise im Kern ein Metall-Halbleiter oder Halbleiter PN-Übergang (Diode), der zwei Signale miteinander multiplizieren kann. So entstehen bei drei Eingangssignale zwei sinnvoll nutzbare Ausgangssignale bei den Frequenzen $f_{IF-} = |f_{lo} - f_{sig}|$ und $f_{IF+} = f_{lo} + f_{sig}$. Eine Frequenzumsetzung wird vorgenommen.

Nur eines der beiden Ausgangssignale wird durch ein Filter ausgewählt. In einer Standard (Radio)-Heterodynarchitektur ist das typischerweise das niederfrequente Signal, bei Spektrumanalysatoren normalerweise das höhere. Man beachte, dass man mit der Durchstimmung von f_{lo} jedes f_{sig} auf ein bestimmtes f_{IF} umsetzen kann. Das Filter kann also festgehalten werden, der Lokal-Oszillator wird verändert. Virtuell entsteht ein durchstimmbares Bandpassfilter.

IF-Gain ist eine variable Verstärkerstufe, die bekannte Dämpfungen bzw. Frequenzverläufe ausnivellieren soll und die Signalamplitude für die weiteren Stufen optimiert.

IF Filter ist dann letztlich das Analyse-Filter, dessen Charakteristik maßgeblich den Ausgang der Analyse bestimmt. Es kann in der Regel in der Bandbreite je nach Geschwindigkeits- und Auflösungsanforderungen variiert werden.

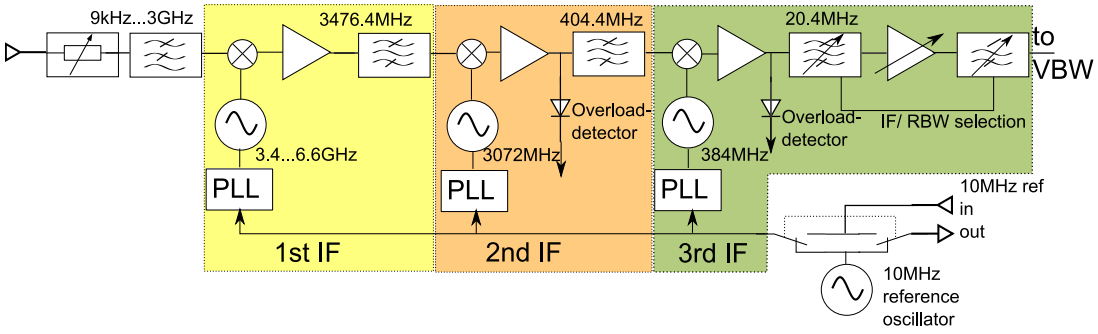


Abbildung 13.7: HF-Teil eines Rohde und Schwarz Spektrum-Analysators.

Sweep Generator erzeugt in der einfachsten Form einfach eine Sägezahnspannung, die proportional die Frequenz des Lokaloszillators durchstimmt und gleichzeitig als Maß für die X-Achse der Darstellung verwendet werden kann.

Lokaloszillator erzeugt (steuert vom Sweep-Generator) ein Sinus-Signal, das virtuell das am Mischer das Eingangssignal mischt und am Analyse-Filter (IF-Filter) vorbeiführt.

Log-Amp und Detektor sorgen für eine logarithmische Leistungsmessung, damit die Leistung im betrachteten Freqeunzbereich sofort in dB vorliegt.

Video-Filter dämpft die bei der Leistungsmessung immer enstehenden Frequenzanteile bei doppelter und weiteren hohen Frequenzen. Diese entsprechen nicht der gesuchten mittleren Wirkleistung und müssen daher eliminiert werden.

Display ist schließlich die Darstellung, früher als Röhre mit x und y-Ablenkung, heute als PC mit TFT-Display ausgeführt.

Eine real existierende Implementation eines solchen Analysators ist in Abb. 13.7 dargestellt. Es existieren mehrere Zwischenfrequenzstufen mit einer Filterung auf 20,4 MHz.

13.2.2 Verwendung und Funktionen

Die wesentliche Funktion ist ein „Frequenz-Sweep“, bei dem der eingestellte Frequenzbereich durchfahren wird. Ein monofrequentes Signal, wie in Abb. 13.8 dargestellt, wird so durch das durchfahrende Filter analysiert. Am Ende wird man auf dem Spektrum-Analysator die Leistungswerte an den einzelnen Filterpositionen finden. Somit erscheint dort die Filterkurve des Analysefilters. Bei nicht-einfrequenten Signalen liegt die Faltung der Filterkurve mit dem Signalspektrum vor.

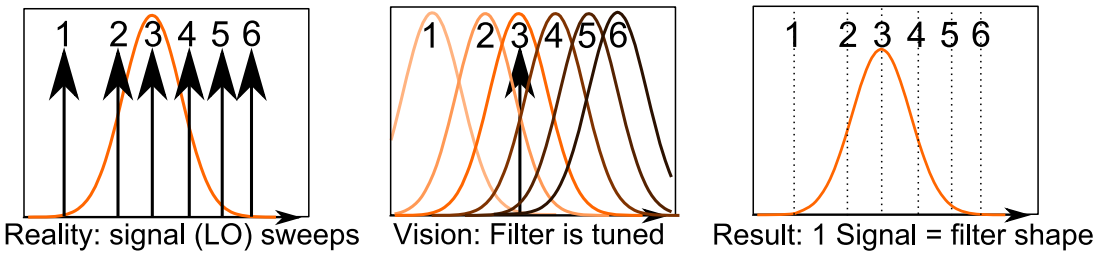


Abbildung 13.8: Ein Frequenz-Sweep bei einem monofrequenten Signal.

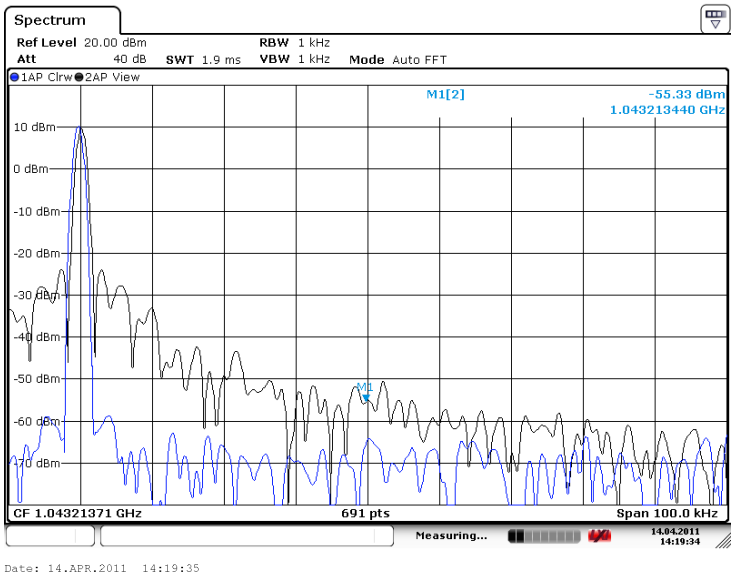
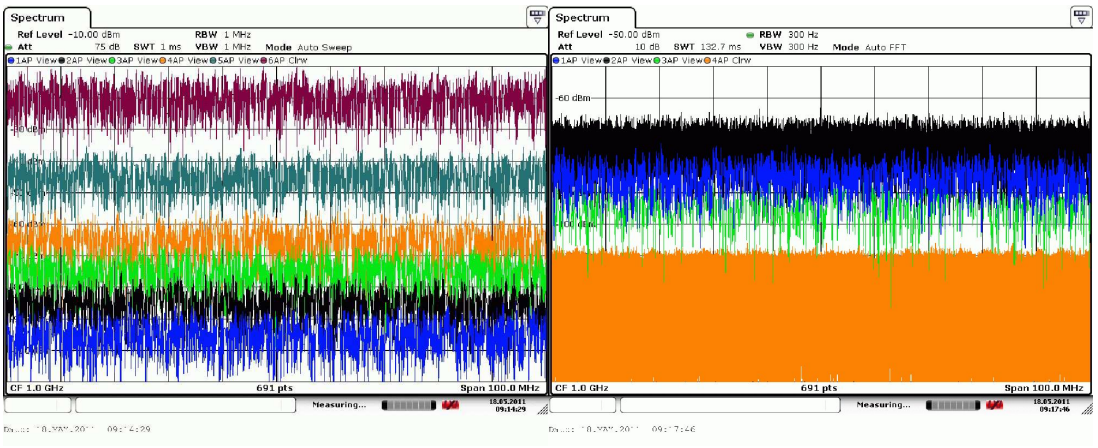


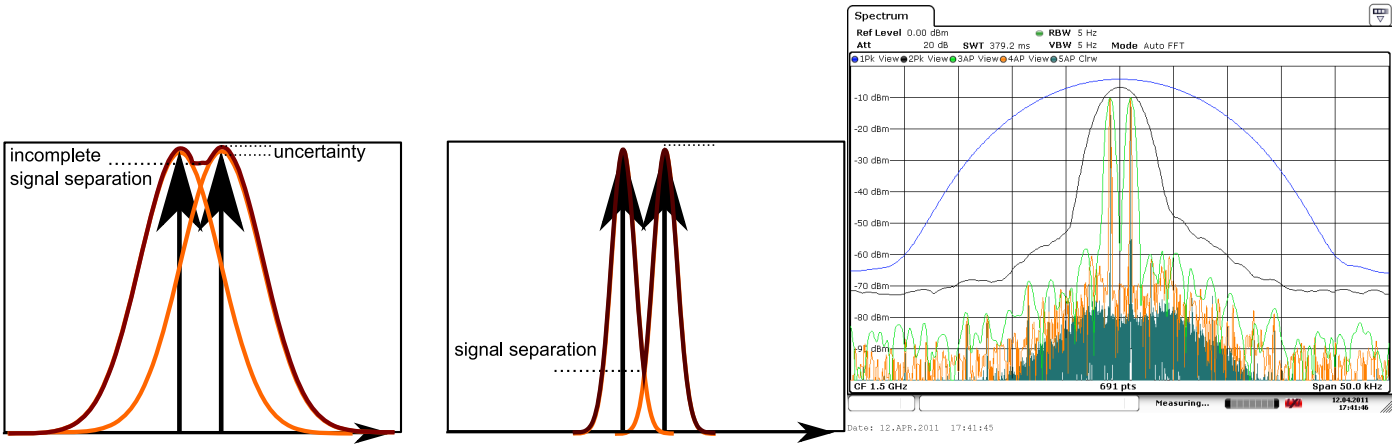
Abbildung 13.9: Ein Frequenz-Sweep in der Realität.

In der Realität erscheint das in Abb. 13.9 vorgestellte Bild auf dem Schirm. Verändert man die Dämpfung am Eingang (Abb. 13.10(a)), so wird die Darstellung des Signals kompensiert, der Speci kennt ja die Einstallung und kann sie herausrechnen. Allerdings steigt der Rauschlevel an, denn das thermische Rauschen kann nicht unterschritten werden, das Signal-Rausch-Verhältnis leidet in dem Maße, in dem man die Dämpfung erhöht. Eine Änderung der Bandbreite (Abb. 13.10(b)) kann im Signal-Niveau ebenso kompensiert werden. Auch hier verändert sich der Rauschlevel in dem Maße, in dem die Bandbreite verändert wird, denn die das Filter passierende Rauschleistung ist proportional der Bandbreite (Gl. 12.1).
Die Bandbreitenauflösung hat aber großen Einfluss auf die Unterscheidung zweier dicht benachbarter Signale, denn ein schwaches Signal kann sich unter der Filterkurve, projiziert von einem starken Signal, verstecken (Abb. 13.11, 13.12), oder zwei gleich starke Signale laufen ineinander. In letzterem Fall definiert man die Bandbreite als den Punkt, an dem



(a) (b)

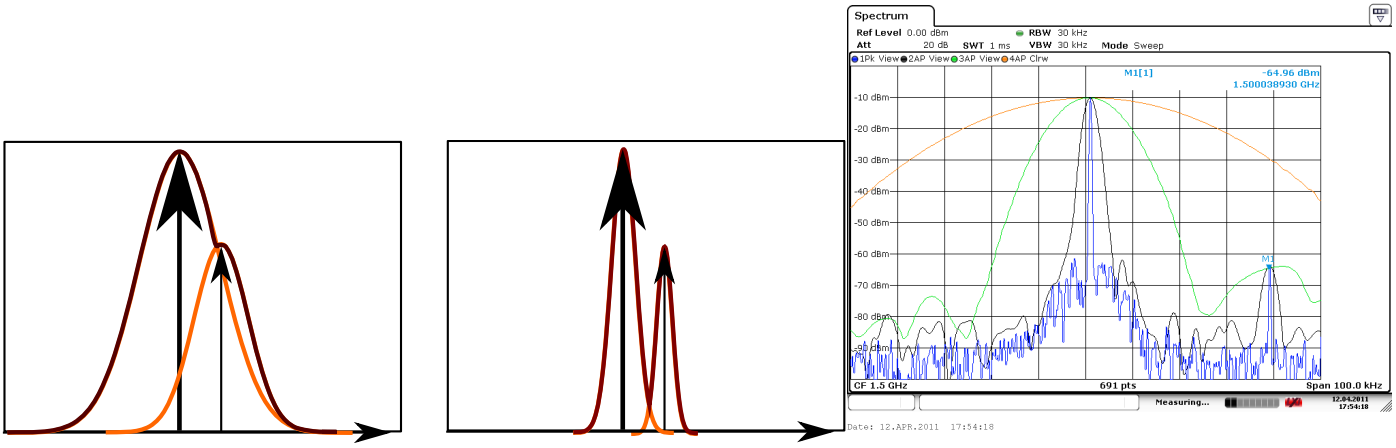
Abbildung 13.10: Auswirkung unterschiedlicher Einstellungen der Eingangsdämpfung (0, 10, 20, 30, 50,75[max] dB) a) und unterschiedlicher Auflösungen (300, 1 k, 1 M, 10 M Hz) (b) .



(a) (b)

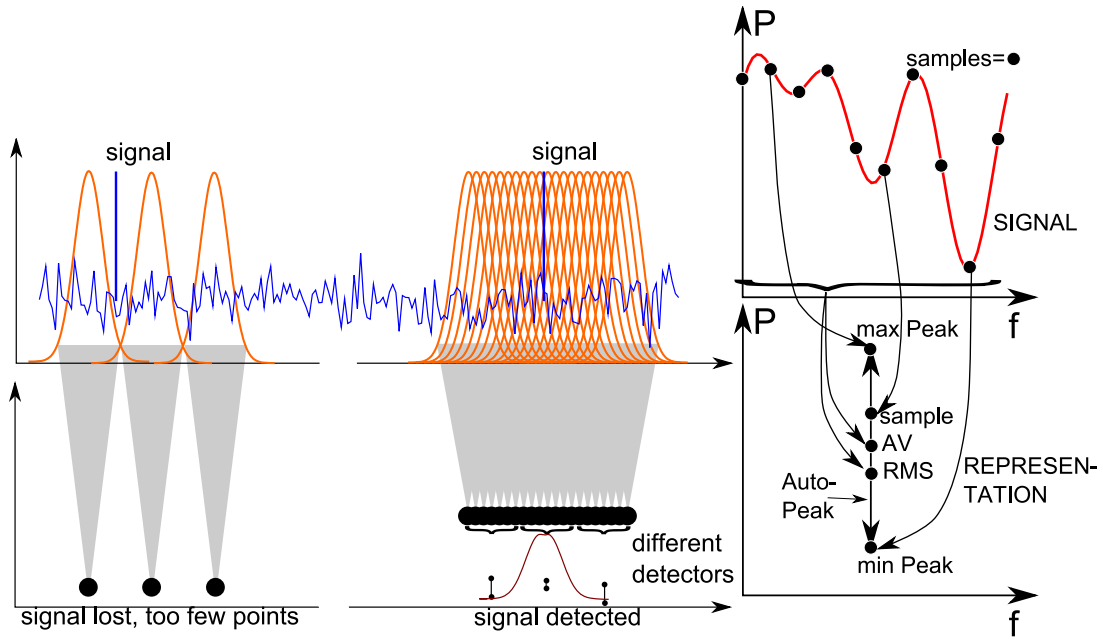
Abbildung 13.11: Separation zweier Signale gleicher Amplitude schematisch (a) und real (b).

das Signal in der Mitte um 3 dB abgefallen ist. Die Separation ungleicher Signale wird maßgeblich durch die Form, deren Abfall, der Filterkurve bestimmt.
Wie auch bei Oszilloskopen, gibt es auch bei Spektrumanalysatoren unterschiedliche Möglichkeiten der Darstellung eines Messpunktes. Normalerweise muss man fordern, dass das Spektrum lückenlos abgetastet wird. Somit kann nur der Fall vorliegen, in dem ein Frequenzbereich zu fein abgetastet wurde und mehr Messpunkte vorliegen als Punkte auf dem



(a) (b)

Abbildung 13.12: Separation zweier Signale ungleicher Amplitude schematisch (a) und real (b).



(a) (b)

Abbildung 13.13: Löcher im Spektrum (a) und Korrespondenz von Messpunkten zu Darstellungspunkten (b).

Display dargestellt werden können. Hier muss man wiederum auswählen (Abb. 13.13).

Max/Min Peak Hier werden Maximum und/oder Minimum ausgewählt und dargestellt.

Auto-Peak nimmt in der Regel Max und Min und verbindet dieses mit einer Linie.

Sample Wählt einen (willkürlichen) Messpunkt zur Darstellung aus.

Root Mean Square (RMS) wählt gemäß $V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i^2}$ einen qudratischen Mittelwert (also Leistungsproportional) der linearen Amplituden v_i aus.

(Linear) Average (AV) wählt den linearen Mittelwert $V_{AV} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i$ aller Messwerte.

13.2.3 Leistungsfähigkeit und Dynamikbereich

Neben Fähigkeiten zu Signalverarbeitung, Benutzeroberfläche, Geschwindigkeit ist die Leistungsfähigkeit eines Spektrumanalysators stark durch seine Fähigkeit zur Messung von Größenordnungen von Signalen bestimmt. Letztere ist festgelegt durch

(Thermischer) Rauschteppich der bei allen Typen vorhanden ist und typischerweise auf ein Niveau von $50\,\Omega$ bezogen wird. Specis unterscheiden sich dennoch in dem Maße in dem sie Rauschen hinzufügen (Rauschzahl). Dieses liegt heute im einstelligen dB-Bereich, früher waren 20-30 dB nicht unüblich.

Phasenrauschen des internen Oszillators, der mitbestimmt, wie gut ein kleines Signal von einem großen unterschieden werden kann.

Kompression definiert die Genauigkeit der Leistungsmessung

Spectral Regrowth und Nichtlinearitäten zeigen an, in welchem Maße der Spektrum-Analysator selber durch nichtlineare Prozesse harmonische Signalkomponenten und Mischprodukte erzeugt, die im Signal ursprünglich nicht vorhanden waren.

In Abb. 13.14 ist nochmals der Einfluss von Rauschen auf die Messung gezeigt. Es wurde die Eingangsdämpfung variiert. Eigentlich sollte die Siganlamplitude immer den gleichen Wert anzeigen, doch durch den Rauscheinfluss wird dieser erheblich verschoben, so dass nicht nur der ggf. uninterressante Rauschteppich steigt, sondern es auch zu Fehlmessungen kommt.
Der so genannten „Displayed noise level“ wird nach

$$L_{DAN} = -174\,\mathrm{dBm(1Hz)} + \left(10\log_{10}\frac{B_{NF}}{\mathrm{Hz}}\right)\mathrm{dB} - 2.5\,\mathrm{dB} \tag{13.2}$$

berechnet.
Weitere Quellen für Fehler sind

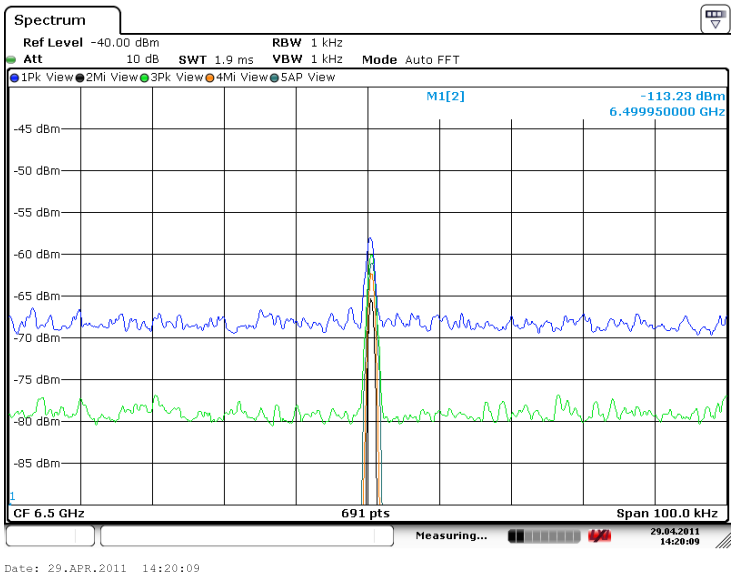
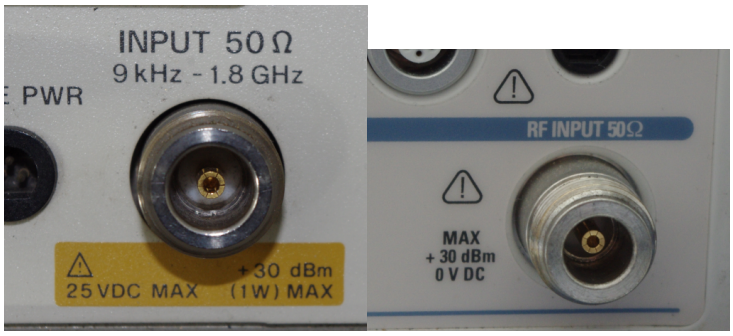


Abbildung 13.14: Einfluss des Rauschens auf die Signalamplitude.

- Absolute Level Error (abs) in der Messung der Leistung
- Linearity und Anzeige Nichtlinearität (abs/rel), also Fehler im Amplitudengang
- Attenuator error (abs/(rel)) bei der Einstellung des Dämpfungsgliedes
- IF Gewinn und Reference Level Setting Error (abs/(rel))
- Level Unsicherheit bei der Umschaltung zwischen verschiedenen Bändern, vor allem im HF-Front-End
- Bandbreiten Fehler und Unsicherheiten darin, so dass man u.U. die genaue Bandbreite eines Filters nicht kennt und es dadurch zu Fehlern in der Amplitude kommt.
- Frequenz-Fehler, weil z.B. der LO einen Frequenzversatz hat und daher die Frequenzanzeige bei z.B. der Peak-Search-Funktion nicht genau ist.

Doch der größte und schlimmste Fehler sitzt vor dem Messgerät und kann es sogar zerstören. Die Anweisungen an der Vorderseite des Specis und in dem Handbuch sind unbedingt zu befolgen (Abb. 13.15). So muss folgendes beachtet werden:

- Niemals eine Gleichspannung anlegen! Diese gelangt direkt auf die Eingangsdiode und wird dort zu einem zerstörenden Stromfluss führen. Gleichspannungen liegen typischerweise auch an, wenn man einen nicht DC-mäßig entkoppelten Transistorverstärker ausmessen will.



(a) (b)

Abbildung 13.15: Warnung an der Vorderseite eines Spektrumanalysators.

- Zu hohe Leistungen anlegen. Dieses kann auch unbewußt geschehen, wenn ein zu prüfender Verstärker beginnt zu Schwingen und seine Sättigungsleistung an das Messgerät abgibt.
- Zu hohe Pulsleistungen.

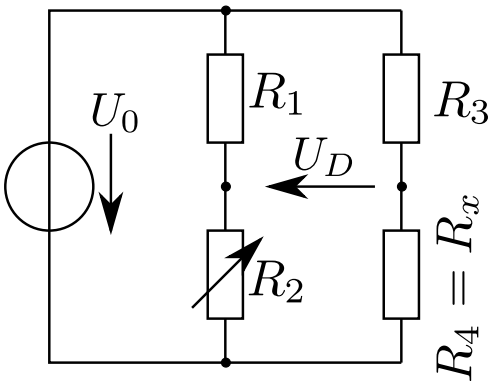


Abbildung 10.10: Wheatstone'sche Brückenschaltung.

10.3 Messbrücken im Gleichstromfall

10.3.1 Abgleichbrücken

Der Prototyp der Messbrücke ist die Wheatstone'sche Brückenschaltung nach Abb.10.10. Es kann leicht berechnet werden, dass die Diagonalspannung

$$U_D = U_0 \left(-\frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) \tag{10.3}$$

dann verschwindet, wenn die Ablgleichbedingung

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \tag{10.4}$$

$$\Leftrightarrow R_4 = R_3 \frac{R_2}{R_1} \tag{10.5}$$

erfüllt ist. Man kann also einen unbekannten Widerstand R_4 dadurch bestimmen, dass man ihn in eine geeignete Brücke gibt und einen anderen Widerstand (bspw. R_2) so lange verändert, bis die Diagonalspannung verschwindet.
Auf ggf. mechanische Ausführung solcher veränderbarer Widerstände wird hier nicht eingegangen. Vielmehr soll die Empfindlichkeit der Brücke untersucht und ggf. passend eingestellt werden.

10.3.2 Einschub: Sensoren für Temperatur- und Dehnungsmessung

Bevor die Beschaltung und Messtechnik von veränderlichen Widerständen erläutert werden, soll zunächst eingeführt werden, warum so etwas überhaupt von Interesse ist. In den

Tabelle 10.2: Spezifischer Widerstand [35] und Temperaturkoeffizenten einiger Metalle [36, 1]

Material	$\rho/(\mu\Omega/\mathrm{m})$	$\alpha/(10^{-3}/\mathrm{K})$	Material	$\rho/(\mu\Omega/\mathrm{m})$	$\alpha/(10^{-3}/\mathrm{K})$
Kupfer	$1,678 \times 10^{-2}$	3,93	Silber	$1,587 \times 10^{-2}$	3,8
Eisen	ca.$0,1$	6,57	Konstantan	$0,5$	$\pm$0,01
Nickel	$6,93 \times 10^{-2}$	6,18	Platin	$0,105$	3,1

allermeisten Fällen ist die Messung von Widerständen und auch Strom und Spannung von nur geringem Interesse und vor allem kein Selbstzweck. Messung elektrischer Größen ist vor allem dann interessant, wenn dadurch auf irgendwelche Umweltgrößen geschlossen werden kann. In der Regel sind nämlich diese Umweltgrößen von Interesse. Solche Bauelemente, die eine beliebige Größe, etwas Temperatur, Feuchtigkeit, mechanische Spannung/ Kraft, irgendetwas chemisches, Durchfluss etc. in eine elektrische Größe (hier: Widerstand) umsetzen, nennt man Sensoren.

10.3.2.1 Temperaturmessung

Schon seit Georg Simon Ohm ist die Temperaturabhängigkeit von (metallischen) Leitern bekannt. Physikalisch liegt dieses daran, dass die freien Elektronen in ihrer Drift durch den Leiter durch Streuung am Gitter gestört werden, abgebremst werden, und wieder beschleunigt werden müssen. Diese Streuung wird umso wahrscheinlicher, je mehr sich die Gitteratome bewegen, und diese Bewegung ist eine Folge der thermischen Energie. Also: Je heißer ein Metall wird, desto mehr schwingen die Gitteratome und stoßen mit driftenden Elektronen zusammen. Der Zusammenhang kann mit

$$R(T) = R_0 \left[1 + \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2\right] \tag{10.6}$$

beschrieben werden. Letztlich liegt hier eine kurze Potenzreihenentwicklung vor, deren lineares Glied α mit der Einheit 1/K entscheidend ist. T_0 definiert die Bezugstemperatur, was oft 0°C oder 20°C ist. Und es ist letztlich egal, ob die Temperaturen in Kelvin oder °C angegeben werden, die Differenz zählt. Wenn man die Termperatur nur in Celsius eingibt und den Bezug dann weglässt, verwendet man allerdings θ anstatt T, die Bezugstemperatur ist implizit $\theta_0 = 0$°C. Einige Werte für technisch bedeutsame Metalle sind in Tab. 10.2 aufgeführt.

Zur Temperaturmessung eingesetzt werden gerne Nickel und Platin, die dann als Draht-Messwiderstände auf Glaskörpern aufgebaut werden. Die technische Realisierung erfolgt über einen Bezugswiderstand bei typischerweise 0°C, der oft zu $100\,\Omega$ oder auch $1000\,\Omega$

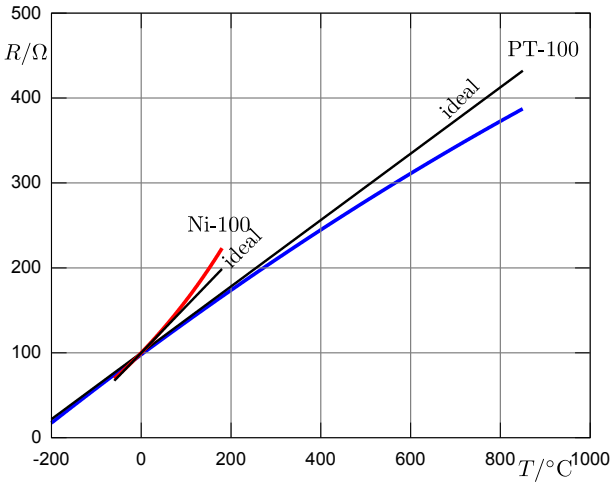


Abbildung 10.11: Temperaturgang von Widerstandsthermometern mit Andeutung der idealen, linearen Kennlinie.

Tabelle 10.3: Koeffizienten für Pt-100 (DIN 60751) und Ni-100 (DIN 43760 zurückgezogen) Widerstände

Parameter	Pt-100	Pt-100	Ni-100
θ	$0^\circ\text{C} \ldots 850^\circ\text{C}$	$-200^\circ\text{C} \ldots 0^\circ\text{C}$	$-60^\circ\text{C} \ldots 180^\circ\text{C}$
$\alpha/(1/^\circ\text{C})$	$3,90801 \times 10^{-3}$	$3,90801 \times 10^{-3}$	$5,485 \times 10^{-3}$
$\beta/(1/^\circ\text{C})^2$	$-0,590802 \times 10^{-6}$	$-0,590802 \times 10^{-6}$	$6,65 \times 10^{-6}$
$\gamma/(1/^\circ\text{C})^3$	$0,0$	$-4,27350 \times 10^{-12}$	$0,0$
$\delta/(1/^\circ\text{C})^4$	$0,0$	$0,0$	$2,805 \times 10^{-11}$

gewählt wird. Die resultierenden Sensoren werden dann Pt-100, Pt-1000, Ni-100 oder Ni-1000 genannt. Ihre genauen Spezifikationen sind in der DIN 60751 (Platin) niedergelegt und grundsätzlich definiert nach

$$R(\theta) = 100\,(1 + \alpha\theta + \beta\theta^2 + \gamma(\theta - 100)^3 + \delta\theta^4) \tag{10.7}$$

mit den Werten in Tab. 10.3. Eine grafische Darstellung ist in Abb. 10.11 gegeben.
Während bei Metallen, die bei Raumtemperatur immer reichlich freie Elektronen aufweisen, der Widerstand mit der Temperatur steigt, ist bei vielen Halbleitern das umgekehrte Verhalten zu beobachten. Hier werden durch höhere Temperatur nämlich Elektronen aus dem Valenzband in freie Elektronen im Leitungsband umgewandelt. Diese stehen so vermehrt zur Leitung zur Verfügung und so fällt der Widerstand. Dieser Effekt ist bei der entsprechenden Temperatur deutlich stärker als bei den Metallen, aber auch sehr viel stärker nichtlinear. Daher können Halbleiter als Heißleiter als empfindliche Temperaturfühler

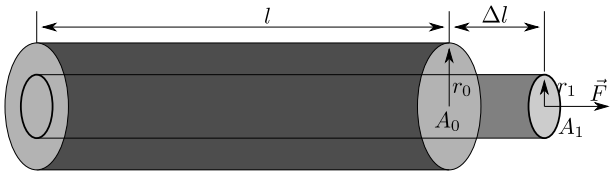


Abbildung 10.12: Änderung der Geometrie eines Leiters bei Krafteinwirkung (übertrieben!)

in einem schmalen Bereich eingesetzt werden.
Evtl. noch die Rechnung zum Heißleiter! hier einführen und ein paar Zahlen....

10.3.3 Dehnungs, Spannungs, und Kraftmessung

Bekanntermaßen lässt sich der Widerstand eines Leiters mit

$$R = \rho \frac{l}{A} \tag{10.8}$$

angeben. Wobei neben dem spezifischen Widerstand die Länge l und der Querschnitt A des Leiters auftauchen (Abb. 10.12). Bei Einwirkung einer Kraft ändert sich vor allem die Geometrie, der Leiter wird gestreckt ($\Delta l > 0$) und, da das Volumen Al konstant bleiben muss, muss sich der Querschnitt ändern, also

$$\Delta A = \frac{Al}{l + \Delta l} - A < 0. \tag{10.9}$$

Die Forderung konstanten Volumens ist eine Näherung, natürlich kann es sein, dass durch die Krafteinwirkung die Gitterzusammenhänge verändert werden und der Stoff sich echt dehnt. In dem Fall würde sich auch die Leitfähigkeit ρ ändern, aber auch das wird hier vernachlässigt. Insgesamt ergibt sich nach der Streckung des Körpers ein Widerstand von

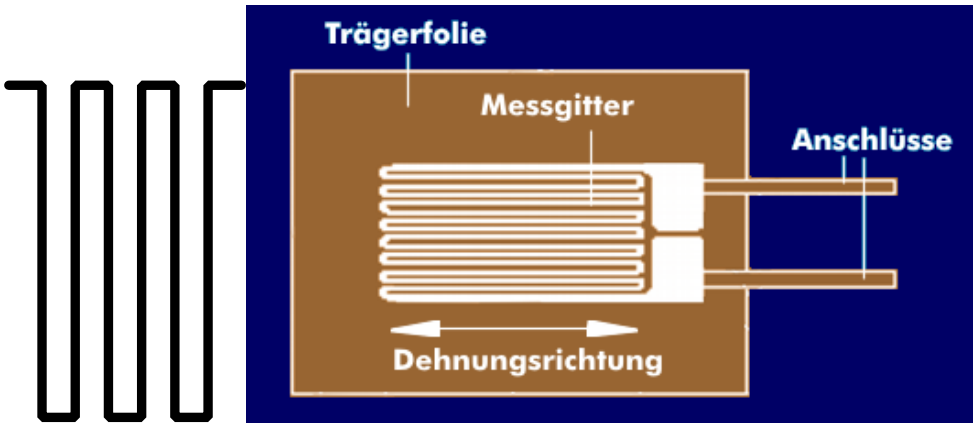
$$R + \Delta R \approx \rho \frac{l + \Delta l}{A + \Delta A} = \rho \frac{(l + \Delta l)^2}{Al} \tag{10.10}$$

$$\approx \rho \frac{l + K\Delta l}{A}. \tag{10.11}$$

Im letzten Schritt wurde der $(\Delta l)^2$-Term vernachlässigt und ein Faktor K eingeführt, der hier offensichtlich $K = 2$ ist, was dem maximal erreichbaren entspricht. Praktisch ist K etwas kleiner. Es ergibt sich also eine Widerstandsänderung von

$$\Delta R \approx \rho \frac{K\Delta l}{A} \tag{10.12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta R}{R} \approx K \frac{\Delta l}{l} = K\epsilon. \tag{10.13}$$



(a) (b)

Abbildung 10.13: Mäandrierung eines Leiters zur Verlängerung (a) und detaillierterer Aufbau eines DMS (geklaut im Internet).

Die Dehnungen sind - ebenso wie die Widerstandsänderungen - mit $\epsilon = 10^{-6} \ldots 10^{-3}$ sehr klein. Die Widerstandsänderung durch Dehnung ist ggf. noch kleiner als die schon besprochene Änderung des Widerstandes durch Temperaturschwankungen. Methoden zur Kompensation dieser Schwankungen sind also essentiell für die Messung von Dehnungen. Um die absoluten Widerstandsänderungen zu vergrößern, ist man bestrebt lange Drähte zu verwenden und mäandriert die Leiter in den Dehnungsmessstreifen (DMS) daher (Abb. 10.13).
Kräfte kann man hiermit nur Mittelbar messen, indem man die DMS auf ein elastisches Material (Metall) aufklebt. Durch Kraft dehnt sich der Tragkörper und dehnt damit den Sensor. Mit Hilfe des Elastizitätsmoduls des Trägermaterials kann die Kraft aus Widerstandsänderung und damit Längenänderung am Platz de DMS bestimmt werden.

10.3.4 Ausschlagbrücken

Geht man von einer **unbelasteten** Brücke, also einer mit idealer Messung der Spannung U_D aus, dann ergibt sich in einer Konfiguration nach Abb. 10.14 mit drei gleichen Widerständen R und einem Widerstand, der je nach Messgröße von seinem Normwert R leicht

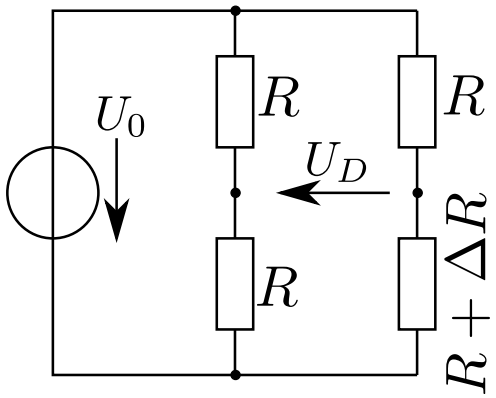


Abbildung 10.14: Viertelbrücke.

abweicht,

$$U_D = U_0 \left(-\frac{1}{2} + \frac{R + \Delta R}{2R + \Delta R} \right) \tag{10.14}$$

$$= U_0 \left(-\frac{1}{2} + \frac{R + \frac{1}{2}\Delta R}{2R + \Delta R} + \frac{\frac{1}{2}\Delta R}{2R + \Delta R} \right) \tag{10.15}$$

$$\approx U_0 \frac{\Delta R}{4R}. \tag{10.16}$$

Wobei hier die letzte Zeile näherungsweise für $\Delta R \ll R$, also kleine Abweichungen, gilt. Wegen des Zusammenhanges

$$E = \frac{dU_D}{d\Delta R} \approx \frac{U_0}{4R} \tag{10.17}$$

für die Empfindlichkeit wird diese Schaltung die **Viertelbrücke** genannt. Erhöhen kann man die Empfindlichkeit durch

- Höhere Versorgungsspannungen U_0, was wegen des damit einhergehenden höheren Stromverbrauchs und auch des höheren Aufwandes unschön ist,
- Erhöhung der Widerstandsänderung, was ggf. konstruktiv schwierig ist, oder
- Weitere Schaltungen

Bringt man zwei Widerstände in einen Zweig der Brücke nach Abb. 10.15(a) ein, dann ergibt sich für die Diagonalspannung

$$U_D = U_0 \left(-\frac{1}{2} + \frac{R + \Delta R_+ + \Delta R_-}{2(R + \Delta R_+)} \right) \tag{10.18}$$

$$= U_0 \frac{\Delta R_-}{2(R + \Delta R_+)} \approx U_0 \frac{\Delta R_-}{2R} \tag{10.19}$$

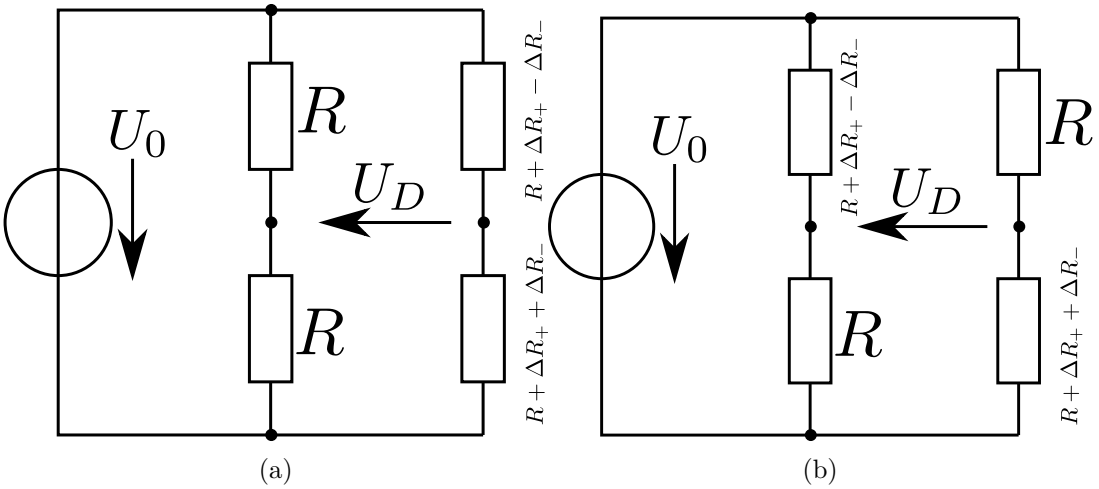


Abbildung 10.15: Halbbrücke mit Unterdrückung von Gleichtaktänderungen (a) und mit Unterdrückung von Gegentaktänderungen (b).

mit Gleichtaktänderungen ΔR_+ und gegensinnigen Änderungen der Widerstände ΔR_-. Man erkennt, dass

- sich die Empfindlichkeit verdoppelt hat (der Faktor U_0/R wird nur noch halbiert),
- eine Gleichtaktänderung der beiden Widerstände fast komplett verschwindet.

Dieses kann man bspw. bei Dehnungsmessstreifen (Abschnitt. 10.3.3) verwenden, die man so anbringt, dass sie die gleiche - ungewollte - Temperaturänderung erfahren und eine unterschiedliche Dehnung spüren. Im Gegensatz dazu erlaubt ein diagonales Einbringen der zu messenden Widerstände nach Abb. 10.15(b) eine Unterdrückung der Gegentaktänderungen:

$$U_D = U_0 \left(\frac{-R}{2R + \Delta R_+ - \Delta R_-} + \frac{R + \Delta R_+ + \Delta R_-}{2R + \Delta R_+ + \Delta R_-} \right) \tag{10.20}$$

$$= U_0 \left(\frac{-R - \frac{\Delta R_+}{2} + \frac{\Delta R_-}{2}}{2R + \Delta R_+ - \Delta R_-} + \frac{\frac{\Delta R_+}{2} - \frac{\Delta R_-}{2}}{2R + \Delta R_+ - \Delta R_-} + \frac{R + \frac{\Delta R_+}{2} + \frac{\Delta R_-}{2}}{2R + \Delta R_+ + \Delta R_-} + \frac{\frac{\Delta R_+}{2} + \frac{\Delta R_-}{2}}{2R + \Delta R_+ + \Delta R_-} \right) \tag{10.21}$$

$$= U_0 \left(\frac{\frac{\Delta R_+}{2} - \frac{\Delta R_-}{2}}{2R + \Delta R_+ - \Delta R_-} + \frac{\frac{\Delta R_+}{2} + \frac{\Delta R_-}{2}}{2R + \Delta R_+ + \Delta R_-} \right) \tag{10.22}$$

$$\approx U_0 \frac{\Delta R_+}{2R}. \tag{10.23}$$

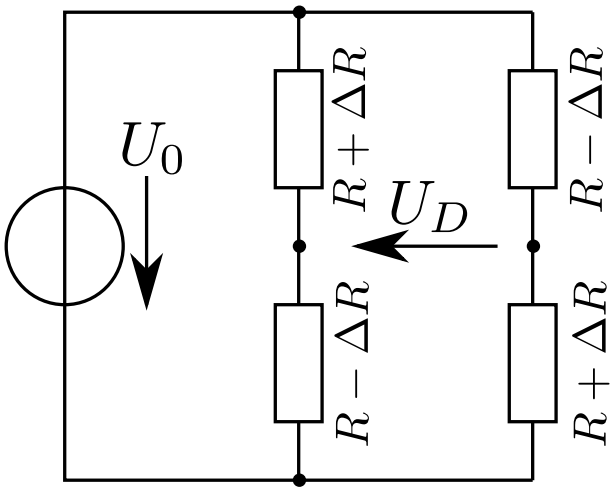


Abbildung 10.16: Vollbrücke

In beiden Fällen hat sich gegenüber der Viertelbrücke die Empfindlichkeit verdoppelt, was man an der Zwei (anstatt der Vier) im Nenner erkennen kann.
Die Vollbrücke nach Abb. 10.16 weist mit

$$U_D = U_0 \frac{\Delta R}{R} \tag{10.24}$$

wiederum die doppelte, also volle, Empfindlichkeit auf. Allerdings werden hier die Gegentaktänderungen in den einzelnen Zweigen unterdrückt.

10.3.4.1 Belastete Brückenschaltung

Bleibt in diesem Semester zur eigenen Recherche....

10.4 Messung komplexer Impedanzen

10.4.1 Impedanzen in Wechselstrom und -spannung

Über Gleichspannungswiderstände hinaus, sind natürlich Impedanzen, die mit Wechselstrom oder -spannungen unterschiedlichster Frequenz gespeist werden, von großem Interesse. In der Regel liegen Widerstand, Kapazität und Induktivität nicht in der reinen, isolierten Form vor, sondern bestehen immer aus dem eigentlichen „Nennelement“ und einigen parasitären Elementen, wie in Abb. 10.17 für Kapazität und Induktivität gezeigt. Oft genügt es, die reaktiven Elemente mit dem Nennelement und einem resistiven Element in Reihe oder parallel zu beschreiben (Abb. 10.18). Eine Charakterisierung kann über den

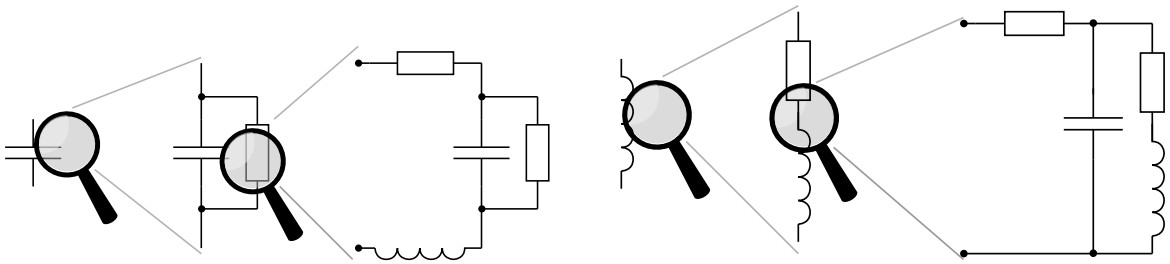


Abbildung 10.17: Ersatzschaltbilder von Kapazität (a) und Induktivität (b)

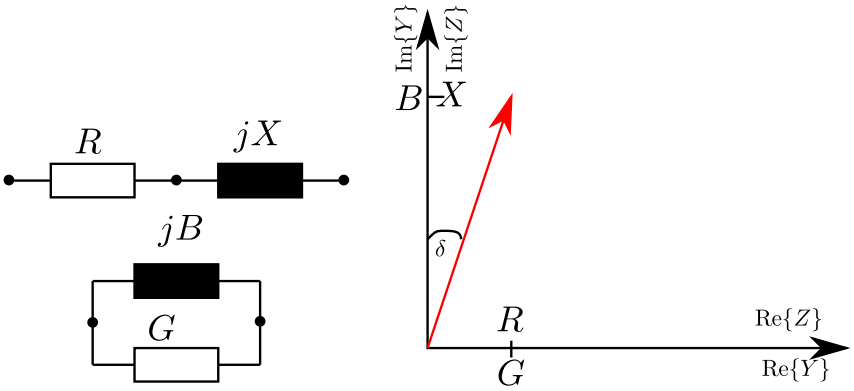


Abbildung 10.18: Zeigerdiagramm einer Impedanz als Ersatzschaltung aus reaktivem und resitivem Element.

Tabelle 10.4: Darstellungen von Wechselgrößen

Bezeichnung	Zeichen	Bezeichnung	Zeichen
Impedanz (komplex)	Z	Admittanz (komplex)	Y
Impedanz, Betrag/ Phase	$\|Z\|,\ \phi$	Impedanz & Verlustwinkel	$\|Z\|,\ (\tan)\delta$
Elemente	$R,\ L$	Elemente	$G,\ C$
Element & Güte	$L,\ Q$		

eingezeichneten Verlustwinkel δ nach

$$\tan\delta = \frac{R}{X} \text{ und} \qquad \tan\delta = \frac{G}{B} \tag{10.25}$$

erfolgen, oder auch über die schon hinlänglich eingeführte Darstellungen gemäß Tab. 10.4. Eine Einordnung der Impedanzen und ihrer Bezeichnungen kann nach Abb. 10.19 erfolgen.

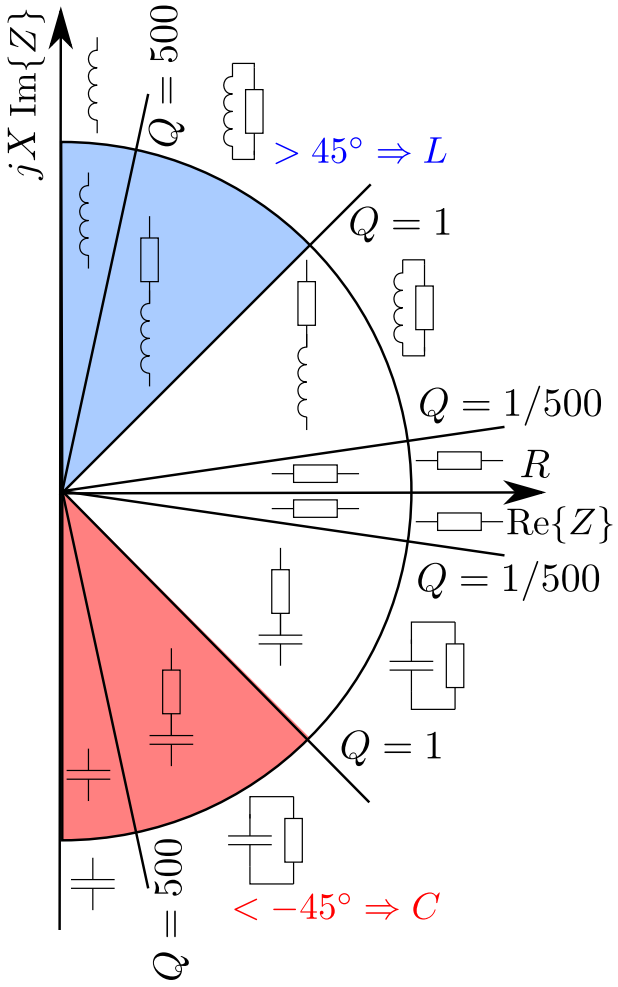


Abbildung 10.19: Darstellung von Elementen in der komplexen Ebene.

10.4.2 Messbrücken

Zur Messung von Impedanzen gibt es unterschiedliche Verfahren. Hier wird mit der Vorstellung von Messbrücken für diesen Fall begonnen.
Prinzipiell sind Messbrücken aus der Gleichstromtechnik bekannt und es können die dortigen Verfahren auf Wechselgrößen übertragen werden. Allein, bei Wechselgrößen liegen mit Real- und Imaginärteil zwei Freiheitsgrade vor, die bedient werden müssen. Daher sind die hier auftretenden Wechselbrücken ensprechend komplizierter (Abb. 10.20), während die Abgleichbedingung mit

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4} \tag{10.26}$$

und ihren Modifikationen prinzipiell gleich geblieben ist.
In den technischen Realisierungen unterscheiden sich die Brücken allerdings schon.

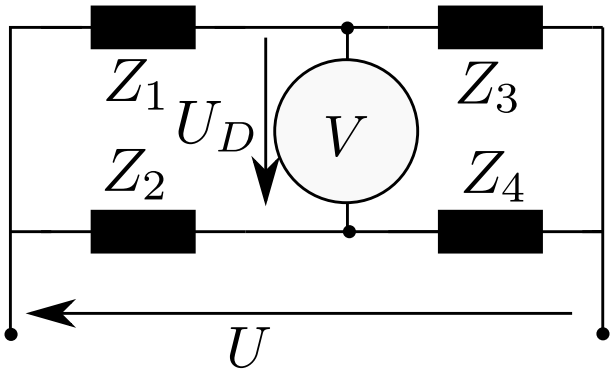


Abbildung 10.20: Prinzipielle Darstellung einer Wechselstrombrücke.

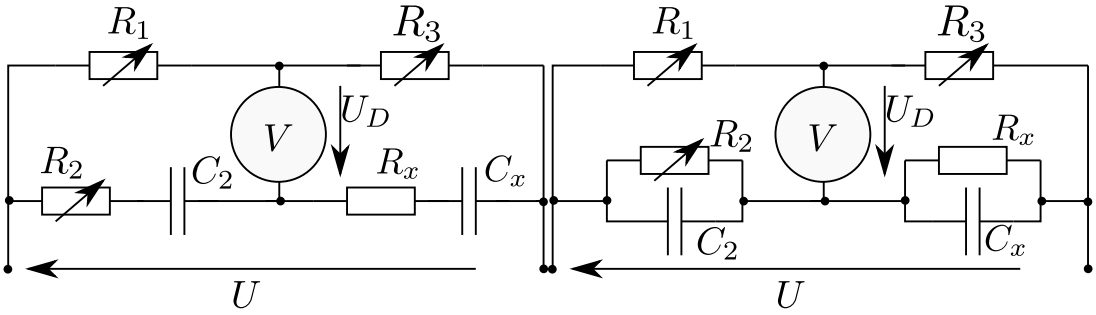


Abbildung 10.21: Serielle (a) und parallel (b) Wechselbrücke nach Wien.

10.4.2.1 Wien-Brücke

Die Wienbrücke zur Bestimmung von kapazitiven Elementen ist in Abb. 10.21 in serieller (a) und paralleler (b) Ausführung gezeigt. Die Brücke ist abgeglichen wenn gemäß Gleichung (10.26)

$$\frac{R_1}{R_2}\left(1 + j\omega C_2 R_2\right) = \frac{R_3}{R_x}\left(1 + j\omega C_x R_x\right) \tag{10.27}$$

und aufgeteilt in Real- und Imaginärteil

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1} \tag{10.28}$$

$$C_x = \frac{R_1 C_2}{R_3} \tag{10.29}$$

gilt.

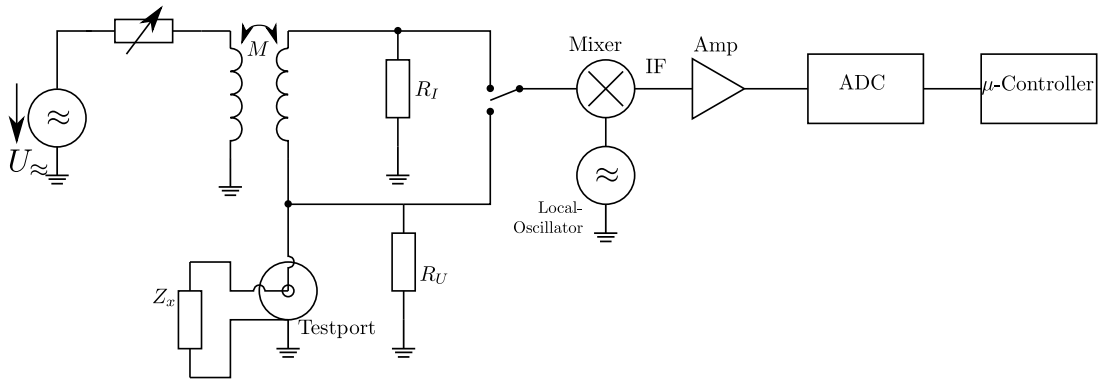


Abbildung 10.26: Vektorielle Messung von Strom- und Spannung.

komplexeren physikalischen Zusammenhängen oder Ersatzschaltbildern versteckt, bspw. hinter einer (parasitären) Kapazität ist in dieser Messung unsichtbar. Wirbelstromverluste als reine Wechselstromeffekte würden bei diesem Verfahren z.B. nicht erfasst.

10.4.4 Drei-Spannungs-Verfahren

Die Recherche ist dem geneigten Leser überlassen.

10.4.5 Auto-Balancing Bridge

Auch interessant, aber nicht in diesem Semester.

10.4.6 Komplexe Strom-Spannungs-Messung

Nur eine komplexe Messung der Spannung und des Stromes ermöglicht eine komplette Darstellung der Impedanz. Solche Verfahren werden in Impedanzmessgeräten oder auch - für sehr hohe Frequenzen - in Netzwerkanalysatoren eingesetzt. Eine Art Blockschaltbild ist in Abb. 10.26 gezeigt. Hier wird die zu messende Impedanz Z_x an einen Testport angeschlossen und von einem Signal im Frequenzbereich von einigen kHz bis ca. 3 GHz gespeist. Gemessen wird die Spannung direkt über einem hochohmigen Widerstand R_U, während der Strom indirekt als der Spannungsabfall über einem Widerstand R_I gemessen wird. Aufgrund der Speisung über einen Übertrager ist dieser Spannungsabfall proportional zum Strom durch Z_x.
Beide Messgrößen werden über ein und denselben Mischer in der Frequenz herabgesetzt und Analog-Digital gewandelt. Dieses Verfahren bietet sich an, da Unterschiede in den

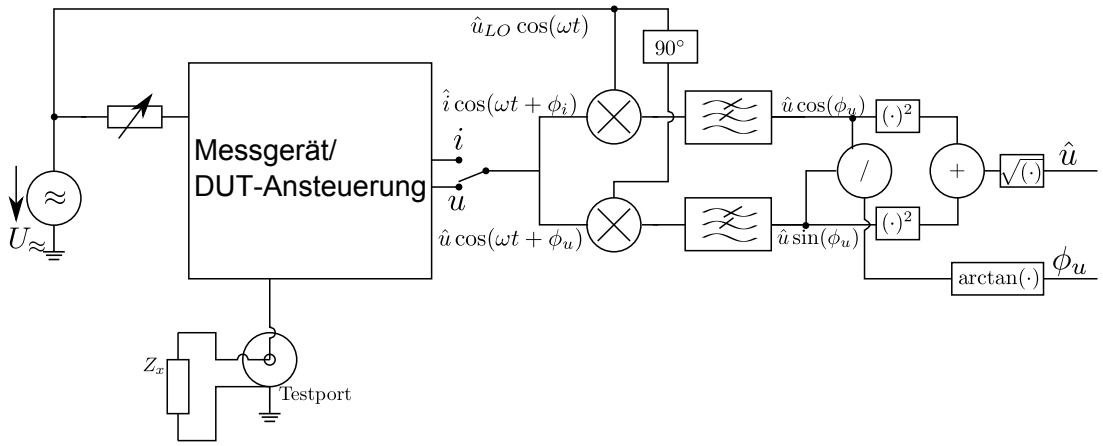


Abbildung 10.27: Auflösung des Rechenwerkes in der vektoriellen Messung von Strom- und Spannung.

analogen Bauteilen zweier Mischer so nicht zum Tragen kommen. Im Analog/ Digitalbereich werden nun beide Signale digital auf ein Gleichsignal herabgesetzt. Dieses geschieht mit zwei um 90° phasenverschobenen Signalen. Der mathematische Prozess kann für die gemessenen (ggf. nur proportionalen) Signale U_M und I_M in einem Schritt wie folgt nachgebildet werden (Abb. 10.27). Beispielhaft für die gemessene Spannung an der Impedanz Z_x wird die Mathematik erläutert: Am Lokaloszillator, $u_{LO}(t) = \hat{u}_{LO}\cos(\omega t)$, der letztlich das Signal zur Messung bereitstellt, wird die Testspannung herabgemischt (Multiplikation), so dass

$$u'_{mix}(t) = u_{LO}(t) \times u_M(t) = \hat{u}_M \hat{u}_{LO}\cos(\omega t+\phi_u)\cos(\omega t) \tag{10.71}$$

$$= \tfrac{1}{2}\hat{u}_M \hat{u_{LO}}\cos(\phi_u) + \text{höhere Terme} \tag{10.72}$$

$$u''_{mix}(t) = u_{LO90^\circ}(t) \times u_M(t) = \hat{u}_M \hat{u}_{LO}\cos(\omega t+\phi_u)\sin(\omega t) \tag{10.73}$$

$$= \tfrac{1}{2}\hat{u}_M \hat{u_{LO}}\sin(\phi_u) + \text{höhere Terme} \tag{10.74}$$

entsteht. Die höheren Frequenzkomponenten werden mittels Tiefpass unterdrückt und es bleiben Real- und Imaginärteil der gemessenen Spannung (Angezeigt durch $\tilde{()}$). Über Betragsbildung und Bestimmung des Phasenwinkels mit

$$|u_M| \propto \sqrt{\tilde{u}'^2_{mix} + \tilde{u}''^2_{mix}} \tag{10.75}$$

$$\phi_u = \arctan\left(\frac{\tilde{u}''_{mix}}{\tilde{u}'_{mix}}\right) \tag{10.76}$$

stehen eben diese Werte für die Spannung und in einem zweiten Schritt auch für den Strom zur Verfügung. Die Impedanz kann durch Quotientenbildung bestimmt werden.

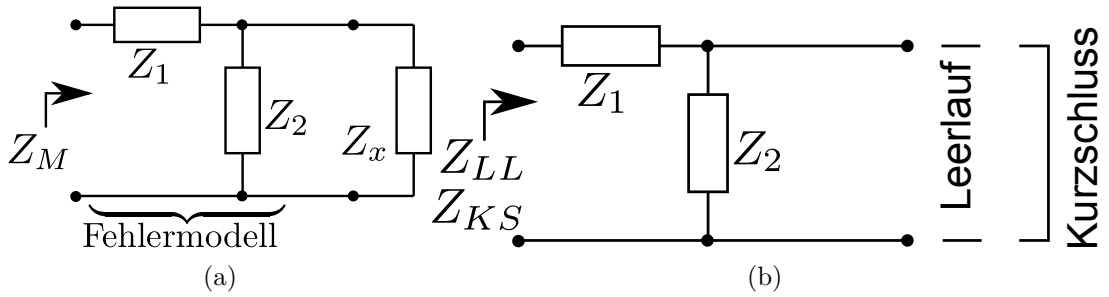


Abbildung 10.28: Fehlermodell bei der Impedanzmessung (a) und Kalibration (b) der Elemente.

10.4.6.1 Kalibration

Die komplexe Impedanzmessung eröffnet die Möglichkeit einer echten Fehlerkorrektur. Dazu wird zunächst ein Fehlermodell definiert, das in diesem Fall aus den in Abb. 10.28(a) gezeigten zwei Impedanzen Z_1 und Z_2 besteht. Natürlich verfälschen diese die gemessene Impedanz Z_M zu

$$Z_M = Z_1 + \frac{Z_2 Z_x}{Z_2 + Z_x} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_x + Z_2 Z_x}{Z_2 + Z_x} \tag{10.77}$$

Sind die Elemente des Fehlermodells bekannt, kann die gesuchte Impedanz rekonstruiert werden zu

$$\Leftrightarrow Z_M Z_2 + Z_M Z_x = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_x + Z_2 Z_x \tag{10.78}$$

$$\Leftrightarrow Z_x(Z_M - Z_1 - Z_2) = Z_1 Z_2 - Z_M Z_2 \tag{10.79}$$

$$\Leftrightarrow Z_x = \frac{Z_2(Z_1 - Z_M)}{Z_M - Z_1 - Z_2}. \tag{10.80}$$

Die Werte in diesem Fehlermodell können leicht durch die Vermessung von Testimpedanzen (Kalibrationsnormalen) vermessen werden (Abb. 10.28(b). Hier werden vorzugsweise Leerlauf und Kurzschluss verwendet, so dass sich

$$Z_{KS} = Z_1 \tag{10.81}$$

$$Z_{LL} = Z_1 + Z_2 \qquad \Leftrightarrow Z_2 = Z_{LL} - Z_{KS} \tag{10.82}$$

bestimmen lassen. Bei Bedarf können erweiterte Fehlermodelle verwendet werden, indem z.B. der Fehler durch ein allgemeines Π-Glied beschrieben wird. Bei entsprechend mehr Freiheitsgraden sind mehr Kalibrationsnormale notwendig.
Die Messung von Impedanzen bei sehr hohen Frequenzen erfolgt in der Regel über eine Betrachtung von Wellentransmission und -reflexion in einem Netzwerkanalysator, was ein Thema einer weiteren Lehrveranstaltung ist.

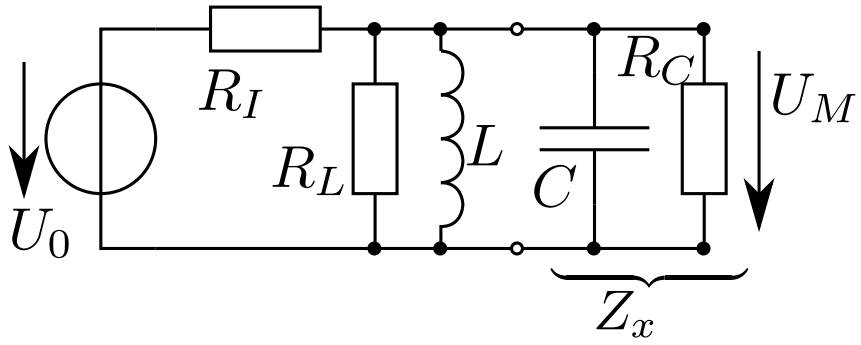


Abbildung 10.29: Parallelschwingkreis zur Resonanzmethode.

10.4.7 Resonanzverfahren

Induktivitäten oder Kapazitäten können als ein unabhängiges Element in einem Schwingkreis bestimmt werden. In Abb. 10.29 soll bspw. eine Kapazität C mit Verlusten R_C bestimmt werden, wozu ein Parallelschwingkreis mit bekanntem L und R_L aufgebaut wird, der von einer Spannungsquelle U_Q mit hochohmigem Innenwiderstand R_I (idealerweise also einer Stromquelle) gespeist wird. Die gemessene Spannung U_M wird in ihrem Frequenzverlauf dargestellt:

$$U_M = U_Q \frac{Z_{ges}}{R_I + Z_{ges}} \tag{10.83}$$

$$\text{mit } Z_{ges} = \frac{1}{G_L + G_C + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C} \tag{10.84}$$

$$\Rightarrow U_M = \frac{U_Q}{R_I(G_L + G_C + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C) + 1}. \tag{10.85}$$

Diese Spannung hat ihr Maximum wenn der Imaginärteil im Nenner verschwindet, also

$$\frac{1}{j\omega_{res} L} + j\omega_{res} C = 0 \tag{10.86}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{1}{\omega_{res}^2 L} \tag{10.87}$$

gilt. Allein durch Auffinden des Spannungsmaximums und der dazu gehörigen Resonanzfrequenz (Abb. 10.30) kann also bei Kenntnis der induktiven Komponente die Kapazität bestimmt werden.

Die Verlustkomponenten R_C gewinnt man aus der Berechnung der Güte bzw. Bandbreite. Die 3 dB-Bandbreite ist also der Frequenzbereich, in dem die Spannung U_M größer als das $1/\sqrt{2}$-fache der Speisespannung ist. Hier liegt auch eine Phasenverschiebung von $\pm 45°$ vor,

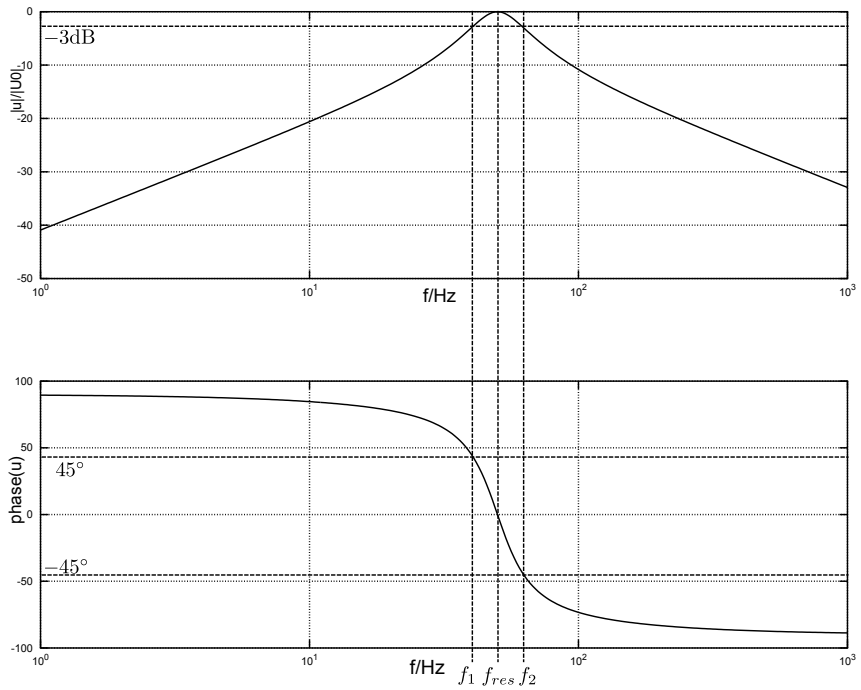


Abbildung 10.30: Bodediagramm zum Parallel-Schwing-Kreis.

die Eckfrequenzen f_1 und f_2 liegen also an den Stellen, an denen Real- und Imaginärteil (des Nenners) in Gl. (10.85) betragsmäßig gleich sind:

$$G_L + G_C + G_I = -\frac{1}{\omega_{12} L} + \omega_{12} C \tag{10.88}$$

$$\Leftrightarrow \omega_{12}^2 CL + (G_L + G_C + G_I)\omega_{12} L = 1 \tag{10.89}$$

$$\Leftrightarrow \omega_{12}^2 + (G_L + G_C + G_I)\omega_{12}\frac{1}{C} + (G_L + G_C + G_I)^2 \frac{1}{4C^2} = \frac{1}{LC} + (G_L + G_C + G_I)^2 \frac{1}{4C^2} \tag{10.90}$$

$$\Leftrightarrow \left(\omega_{12} + (G_L + G_C + G_I)\frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{LC} + (G_L + G_C + G_I)^2 \frac{1}{4C^2} \tag{10.91}$$

$$\Leftrightarrow \omega_{12} = \pm(G_L + G_C + G_I)\frac{1}{2C} + \sqrt{\frac{1}{LC} + (G_L + G_C + G_I)^2 \frac{1}{4C^2}} \tag{10.92}$$

$$\Rightarrow 2\pi B = \omega_2 - \omega_1 = (G_L + G_C + G_I)\frac{1}{C} \tag{10.93}$$

$$\Rightarrow B = f_2 - f_1 = \frac{G_L + G_C + G_I}{2\pi C}. \tag{10.94}$$

Hier wurden in der Rechnung die Leitwerte gemäß $G = 1/R$ verwendet, weil es an einigen

Stellen günstiger ist. Mit der Güte Q definiert als

$$Q = \frac{f_{res}}{B} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times \frac{C}{G_L + G_C + G_I} \tag{10.95}$$

$$= \sqrt{\frac{C}{L}} \times \frac{1}{G_L + G_C + G_I} \tag{10.96}$$

lässt sich nun der Verlust in der gesuchten Impedanz zu

$$G_C = \frac{1}{Q} \times \sqrt{\frac{C}{L}} - G_L - G_I \tag{10.97}$$

bestimmen. Man erkennt, dass es insbesondere bei Elementen mit geringen Parallelverlusten G_C vorteilhaft, wenn nicht zwingend, ist, auch im Schwingkreis entsprechend hochwertige Komponenten mit kleinen G_L und G_I bzw. eine hochohmige Quelle R_I zu verwenden. Wird dieses nicht getan, wird die Güte bei $G_I + G_L > G_C$ nach Gl. (10.96) von diesen dominiert und ein kleines G_C, was ja Ziel eines guten Kondensators ist, kann nicht bestimmt werden.